УДК 515.122

КРИТЕРИИ РАЗЛИЧИМОСТИ В РАЗМЕЧЕННЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ
БЕЛГИЛЕНГЕН ТОПОЛОГИЯЛЫК МЕЙКИНДИКТЕРДЕ АЙЫРУУЧУЛУКТУН КРИТЕРИЙЛЕРИ
CRITERIA OF RECOGNIZABLITY IN MARKED TOPOLOGICAL SPACES

Жораев А.Х.
Кыргызско-Узбекский университет, г. Ош, Кыргызстан
jjk_kuu@mail.ru

Аннотации: В статье произведен обзор понятия различимости для топологических пространств и их частных случаев - метрических пространств и кинематических пространств. Найдены условия различимости для регулярных топологических пространств.

Макалада топологиялык мейкиндиктер жана алардын айрым учурлары: метрикалык мейкиндиктер, кинематикалык мейкиндиктер үчүн айыруучулуктун түшүнүгүн кароосу аткарылды. Регулярдык топологиялык мейкиндиктер үчүн айыруучулуктун шарттары табылды.

A survey of notion of recognizablity for topological spaces and their particular cases: metrical spaces and kinematical spaces is performed. Conditions of recognizablity for regular topological spaces are found.

Ключевые слова: топологическое пространство; метрическое пространство; кинематическое пространство; размеченное пространство; распознаваемость

Түйүндүү сөздөр: топологиялык мейкиндик, метрикалык мейкиндик, кинематикалык мейкиндик, белгиленген мейкиндик, аныктап таануу

Keywords: topological space; metrical space; kinematical space; marked space, recognizablity

Введение

Ранее рассматривались топологические пространства с одной отмеченной точкой, и операции над ними, например, «букет пространств» - отождествление отмеченных точек в нескольких пространствах, см. например [1]. Было отмечено, что два гомеоморфных пространства с различными отмеченными точками могут уже не быть гомеоморфными.

В [2] было предложено рассматривать несколько отмеченных точек.

В связи с разработкой компьютерного представления кинематических топологических пространств [3], в [4] был поставлен вопрос о «раскраске» некоторых множеств в пространстве с целью распознавания его точек. С этой целью, в [5] было предложено рассматривать любое множество отмеченных точек и введены соответствующие определения размеченного пространства, локально различимого по данной разметке пространства и локально различимого пространства в различных подклассах класса топологических пространств. Была доказана локальная различимость эвклидовых пространств, рассматриваемых, как метрические.

В [6] была доказана локальная различимость для сепарабельных «более чем одномерных» кинематических пространств и высказана гипотеза о локальной различимости для сепарабельных кинематических пространств без дополнительных предположений.

В нашей статье [7] эта гипотеза доказана для локально плоских сепарабельных кинематических пространств. В нашей статье [8] эта гипотеза доказана без дополнительных предположений.

В настоящей статье получены достаточные условия локальной различимости в регулярном топологическом пространстве.

1. Необходимые определения

О п р е д е л е н и е 1 [3]. К и н е м а т и ч е с к и м п р о с т р а н с т в о м называется множество G точек и множество K м а р ш р у т о в**.** Каждый маршрут M – это пара: число $T_M > 0$ (в р е м я маршрута) и функция $m_M : [0, T_M] \to G$ (т р а е к т о р и я маршрута). Выполняются следующие свойства.

(K1) Для любых $z_0 \neq z_1$ существует такое $M \in K$, что $m_M(0) = z_0$ и $m_M(T_M) = z_1$, и множество значений T_M для таких M ограничено снизу положительным числом {передвижение между любыми точками возможно, но сколь угодно быстрое передвижение невозможно}.

(K2) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$, то также $\{T_M, m_M(T_M - t)\} \in K$ {движение в обратном направлении}.

(K3) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$ и $T^* \in (0, T_M)$, то также: $\{T^*, m^*(t) \equiv m_M(t)\ (0 \le t \le T^*)\} \in K$ {можно остановиться в любой момент}.

(K4) Если $\{T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1) = m_2(0)$, то пара:
число $T^* = T_1 + T_2$ и функция $m^*(t) = m_1(t)\ (0 \le t < T_1)$; $m^*(t) = m_2(t - T_1)\ (T_1 \le t \le T_1 + T_2)$ также принадлежит K {транзитивность}.

Приведем определения из [5]:

О п р е д е л е н и е 2. Если две точки топологического пространства имеют гомеоморфные окрестности, то они называются л о к а л ь н о о д н о р о д н ы м и.

Таким образом, топологическое пространство распадается на подпространства, каждое из которых содержит локально однородные между собой точки.

О п р е д е л е н и е 3. Топологическое пространство (X, τ) вместе с выделенным всюду плотным множеством $M \in X$ называется р а з м е ч е н н ы м.

О п р е д е л е н и е 4. Две локально однородных точки $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ называются р а з л и ч и м ы м и по разметке M, если для любых гомеоморфных между собой окрестности V_1 точки x_1 и окрестности V_2 точки x_2 и любого гомеоморфизма $J: V_1 \to V_2$ образ $P(J)(V_1 \cap M) \neq V_2 \cap M$ (иными словами, ростки множества M по фильтрам окрестностей точек x_1 и x_2 различны).

Для подклассов класса топологических пространств вместо гомеоморфизмов в данном определении нужно взять морфизмы данного подкласса соответственно.

О п р е д е л е н и е 5. Топологическое пространство (X, τ) называется л о к а л ь н о р а з л и ч и м ы м п о р а з м е т к е M, если любые две однородных точки из этого пространства являются локально различимыми по разметке M.

О п р е д е л е н и е 6. Топологическое пространство (X, τ) называется локально различимым, если существует такая разметка M, что оно является различимым по этой разметке.

2. Условия локальной различимости в топологическом пространстве

Ранее нами были доказаны

Л е м м а 1. В регулярном топологическом пространстве G множество, получающееся исключением из связного замкнутого множества конечного количества точек, не может быть замкнутым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Y \subset G$ – связное замкнутое множество, конечное множество $Y' = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset Y$. Предположим, что $Y_0 = Y \setminus Y'$ - замкнутое множество. По определению регулярного топологического пространства, существуют такие открытые окрестности $V_1, \ldots, V_n$ множества Y_0, и $U_1, \ldots, U_n$ точек $x_1, \ldots, x_n$ соответственно, что $V_1 \cap U_1 = \varnothing, \ldots, V_n \cap U_n = \varnothing$. Положим $V_0 = V_1 \cap \ldots \cap V_n$, $U_0 = U_1 \cap \ldots \cap U_n$.

Тогда получаем: множество V_0 является окрестностью множества Y_0, множество U_0 является окрестностью множества Y', $V_0 \cap U_0 = \varnothing$. Следовательно, $Y = Y_0 \cup Y'$ – несвязное множество, что противоречиво. Лемма доказана.

В связи с доказанным результатом мы ввели

О п р е д е л е н и е 7. Множество, получающееся исключением из связного замкнутого множества конечного количества точек, будем называть к о н е ч н о-п о ч т и-с в я з н о-замкнутым. Множество, получающееся исключением из связного замкнутого множества n точек, будем называть n-почти-связно-замкнутым.

Л е м м а 2. По заданному n-почти-связно-замкнутому множеству Y_0 исключенные точки определяются однозначно: его объединение с конечным множеством K, таким, что $K \cap Y_0 = \varnothing$, будет связным и замкнутым тогда и только тогда, когда множество K совпадает с множеством исключенных точек (см. Y' выше).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В обозначениях доказательства Леммы 1 обозначим $Y'' = K \cap Y'$, $Z = K \setminus Y'$, тогда $Y_0 \cup K = (Y_0 \cup Y'') \cup Z$. По построению, $Z \cap Y' = \varnothing$, а по условию $Z \cap Y_0 = \varnothing$. Отсюда $Z \cap Y = \varnothing$.

Если $Z \neq \varnothing$, то, как и в доказательстве Леммы 1, получим, что существуют такие открытые окрестности V множества Y (и тем самым множества $Y_0 \cup Y''$) и U множества Z, что $V \cap U = \varnothing$. то есть множество $Y_0 \cup K$ несвязно, что противоречиво. Таким образом, доказано, что $Z = \varnothing$.

Если $Y'' \neq Y'$, то $Y_0 \cup Y'' = (Y_0 \cup Y') \setminus (Y' \setminus Y'') = Y \setminus (Y' \setminus Y'')$ – не связно, что противоречиво. Из $Z = \varnothing$ и $Y'' = Y'$ следует, что $K = Y'$. Лемма доказана.

Докажем:

Т е о р е м а 1. Если в регулярном сепарабельном топологическом пространстве G со счетной базой окрестностей каждой точки выполняется условие:

в любом открытом непустом множестве существует замкнутое связное множество мощности континуума без внутренних точек (квазидуга),

то G локально различимо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Z = \{z_k \mid k = 1, 2, 3, \ldots\}$ - счетная всюду плотная последовательность различных точек в G. Будем строить всюду плотное множество S следующим образом.

1) Возьмем убывающую по сложению базу окрестностей - последовательность открытых множеств $\{V_k \subset Z \mid k = 1, 2, 3, \ldots\}$ точки z_1.

2) Внутри открытого множества V_1 возьмем квазидугу и обозначим ее D_{11}.

3) Внутри открытого множества V_2 возьмем любую точку. Если она лежит на квазидуге D_{11}, то возьмем открытую окрестность W этой точки, лежащую внутри открытого множества V_2. По условию «без внутренних точек» множество $W \setminus D_{11}$ непусто, а по условию «замкнутости» D_{11} множество $W \setminus D_{11}$ открыто. Возьмем в этом множестве квазидугу D_{12}.

4) Внутри открытого множества V_3 возьмем любую точку. Если она лежит на квазидуге D_{11}, то возьмем открытую окрестность W_1 этой точки, лежащую внутри открытого множества V_3. По условию «без внутренних точек» множество $W_1 \setminus D_{11}$ непусто, а по условию «замкнутости» D_{11} множество $W_1 \setminus D_{11}$ открыто. Возьмем в этом множестве любую точку. Если она лежит на квазидуге D_{12}, то возьмем открытую окрестность W_2 этой точки, лежащую внутри V_3, и в множестве $W_2 \setminus D_{13}$ - квазидугу D_{13}.

5) Продолжая этот процесс, построим последовательность квазидуг

$D_{11}, D_{12}, \ldots,$
имеющих попарно пустые пересечения и сходящихся к точке z_1.

6) Возьмем открытую окрестность точки z_2, не содержащую точку z_1, и так же построим последовательность квазидуг

$D_{21}, D_{22}, \ldots,$
имеющих попарно пустые пересечения и сходящихся к точке z_2. Поскольку $z_2 \neq z_1$, только конечное количество из квазидуг $D_{11}, D_{12}, \ldots,$ будет иметь непустые пересечения с окрестностями точки z_2 в этом построении.

7) Так же построим последовательности

$D_{31}, D_{32}, \ldots,$

$D_{41}, D_{42}, \ldots,$

…

Переходим к построению всюду плотного множества S.

Двойную последовательность дуг занумеруем следующим образом.

1) D_{11}, *3)* D_{12}, *6)* $D_{13},\ldots,$

2) D_{21}, *5)* $D_{22}, \ldots,$

4) $D_{31}, \ldots,$

…

Из каждой из дуг удалим указанное количество точек, получим соответственно n-почти-связно-замкнутые множества, $n=1,2,3,\ldots$.

Объединение этих множеств обозначим через S .

Докажем, что это множество удовлетворяет Определению 6. Пусть $x \neq y$ – две различные точки в G. Возьмем их непересекающиеся открытые окрестности V_x, V_y. В каждой из окрестностей V_x, V_y существуют точки x_u, x_v соответственно из последовательности $\{x_q \mid q=1, 2, 3,\ldots\}$ вместе со своими окрестностями. Следовательно, в каждой из окрестностей V_x, V_y находятся полностью n-почти-связно-замкнутые множества D_x', D_y' из S с различными, сколь угодно большими n.

(По построению, только конечное количество множеств из последовательностей D_{u1}, $D_{u2}, \ldots,$ $D_{v1}, D_{v2}, \ldots,$ может иметь непустое пересечение с внешностями окрестностей V_x, V_y соответственно).

В силу лемм 1 и 2, множества D_x', D_y' существенно различны и не могут быть гомеоморфными. Следовательно, множества $V_x \cap S$ и $V_y \cap S$ не могут быть гомеоморфными. Теорема доказана.

Список использованной литературы:

1. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. – Москва: Наука, 1989. – 528 с.
2. Лекции по симплектической геометрии и топологии / пер. с англ. Ж. Т. Гавриловой, Ф. Ю. Попеленского; под ред. Я. Элиашберга и Л. Трейнор. – Москва: МЦНМО, 2008. - 424 с.
3. Борубаев А.А., Панков П.С. Компьютерное представление кинематических топологических пространств. - Бишкек: КГНУ, 1999. – 131 с.
4. Borubaev A.A., Pankov P.S., Chekeev A.A. Spaces Uniformed by Coverings. –, Budapest: Hungarian-Kyrgyz Friendship Society, 2003. – 169 p.
5. Борубаев А.А., Панков П.С. Распознаваемость размеченных топологических пространств // Вестник КНУ, 2007, серия 3, выпуск 4. – С. 5–8.

6. Борубаев А.А., Панков П.С. Распознаваемость размеченных кинематических пространств // Вестник МУК, № 1(16), 2008. – С. 205-207.
7. Жораев А.Х. Распознаваемость в локально плоских кинематических пространствах // Вестник МУК, № 1(20), 2011. – С. 55-58.
8. Zhoraev A. Separable kinematical spaces are recognizable // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Ed. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 28-31.