

УДК 517.968

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА
СЫЗЫКТУУ ЭМЕС, ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР
СИСТЕМАСЫН КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ УСУЛУ МЕНЕН ИЗИЛДӨӨ
USING THE METHOD OF THE ADDITIONAL ARGUMENT FOR
SYSTEM OF NON-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И.

Аннотация: Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Сызыктуу эмес, жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн бааштапкы маселенин чечиминин жашоосу менен жалгыздыгынын жетишерлик шарттары алынган.

There are obtained sufficient conditions for existence and uniqueness of solutions of initial value problem for system of nonlinear partial differential equations.

Ключевые слова: система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, метод дополнительного аргумента, принцип сжимающих отображений.

Урунттуу сөздөр: Сызыктуу эмес, жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасы, кошумча аргумент кийирүү усулу, кысуучу чагылтуулардын принциби.

Key words: system of non-linear partial differential equations, method of additional argument, contracting mappings principle.

В [1] рассмотрена система нелинейных интегро- дифференциальных уравнений в частных производных. Методом дополнительного аргумента задача сводится к системе интегральных уравнений.

В [2] метод дополнительного аргумента применен для решения задачи Коши для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

В работе [3] метод дополнительного аргумента применен для систем квазилинейных уравнений. С помощью метода дополнительного аргумента задача сводится к интегральному уравнению, в котором вспомогательные функции определяются из системы уравнений без правых частей с согласованными начальными условиями.

В данной работе рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_i(t, x)}{\partial t} + \mathcal{G}_1(t, x) \frac{\partial \mathcal{G}_i(t, x)}{\partial x} = f_i(t, x, \mathcal{G}_1(t, x), \mathcal{G}_2(t, x), \dots, \mathcal{G}_n(t, x)), \quad (1)$$

$$(t, x) \in G_2(T) = [0, T] \times R$$

при начальном условии

$$\mathcal{G}_i(0, x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in R. \quad (2)$$

Пусть $C(\Omega)$, $C^{(k)}(\Omega)$, $C^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}(\Omega)$ – пространства функций, определенных и непрерывных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k ; соответственно вместе со своими производными до порядка α_i по i -му аргументу ($i=1, \dots, n$)) на Ω ;

$\overline{C}, \overline{C}^{(\dots)}$ - пространства функций с дополнительным условием ограниченности (соответственно и для указанных производных);

$Lip(N|_u, M|_v, \dots)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом N , по переменной v с коэффициентом $M, \dots$; для функции одной переменной индекс будем опускать;

Теорема. Пусть $\varphi_i(x) \in \overline{C}^{(1)}(R)$, $i = 1, 2, \dots, n$,
 $f_i(t, x, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) \in \overline{C}^{(1)}(G_2(T) \times R^n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. и удовлетворяет условию Липшица по переменным $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$.

Тогда существует такое $0 < T_* \leq T$, что система (1) с начальными условиями (2) имеет решение в пространстве $\overline{C}^{(1)}(G_2(T_*))$.

Доказательство.

Лемма 1. В классе $\overline{C}^{(1)}(G_2(T_*))$ задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \vartheta_i(t, x) = & \varphi_i(p(0, t, x)) + \\ & + \int_0^t f_i(\tau, p(\tau, t, x), \vartheta_1(\tau, p(\tau, t, x)), \vartheta_2(\tau, p(\tau, t, x)), \dots, \vartheta_n(\tau, p(\tau, t, x))) d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

$$p(s, t, x) = x - \int_s^t \vartheta_1(v, p(v, t, x)) dv, \quad (4)$$

$$(s, t, x) \in Q_2(T) = \{0 \leq s \leq t \leq T, x \in R\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство леммы 1. Применяя метода дополнительного аргумента для задачи (1)-(2), сводим задачу к системе интегральных уравнений (3)-(4).

Пусть теперь $\vartheta_i(t, x)$, $p(s, t, x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, решения системы интегральных уравнений (3)-(4).

Тогда $\vartheta_i(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2).

В самом деле, из (3) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_i(t, x)}{\partial t} + \vartheta_1(t, x) \frac{\partial \vartheta_i(t, x)}{\partial x} = & \varphi'_i(p(0, t, x)) \left[\frac{\partial p(0, t, x)}{\partial t} + \vartheta_1(t, x) \frac{\partial p(0, t, x)}{\partial x} \right] + \\ & + \int_0^t [f_{i_x} + f_{i_{\vartheta_1}} \vartheta_{1x} + \dots + f_{i_{\vartheta_n}} \vartheta_{nx}] \left[\frac{\partial p(\tau, t, x)}{\partial t} + \vartheta_1(t, x) \frac{\partial p(\tau, t, x)}{\partial x} \right] d\tau + \\ & + f_i(t, x, \vartheta_1(t, x), \vartheta_2(t, x), \dots, \vartheta_n(t, x)) \end{aligned}$$

Отсюда в силу

$$\frac{\partial p(s, t, x)}{\partial t} + \vartheta_1(t, x) \frac{\partial p(s, t, x)}{\partial x} = 0, \text{ которое получается из (4), из (5) получается уравнение (1).}$$

Лемма 2. Пусть для $i = 1, 2, \dots, n$ функции $\varphi_i(x) \in Lip(L_i)$, и $f_i(t, x, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) \in Lip(M_0^i|_x, M_1^i|_{\vartheta_1}, \dots, M_n^i|_{\vartheta_n})$.

Тогда система интегральных уравнений (3)-(4) имеет единственное решение.

Доказательство леммы 2. Преобразуем интегральное уравнение (3). Заменяя в нем t через s , x на $p(s, t, x)$ и используя равенство

$$p(s, t, p(t, \theta, x)) = p(s, \theta, x), \quad (s, t, \theta, x) \in Q_3(T).$$

$$Q_3(T) = \{(s, t, \theta, x) | 0 \leq s \leq t \leq \theta \leq T, x \in R\};$$

Тогда из (3), (4) имеем:

$$\omega_i(s, t, x) = \varphi_i(p(0, t, x)) + \int_0^s f_i(\tau, p(\tau, t, x), \omega_1(\tau, t, x), \omega_2(\tau, t, x), \dots, \omega_n(\tau, t, x)) d\tau, \quad (5)$$

$$p(s, t, x) = x - \int_s^t \omega_1(v, t, x) dv, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

где обозначено

$$\omega_i(s, t, x) = \vartheta_i(s, p(s, t, x)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (5) получаем

$$\begin{aligned} \omega_i(s, t, x) &= \varphi_i(x - \int_0^t \omega_1(v, t, x) dv) + \\ &+ \int_0^s f_i(\tau, x - \int_\tau^t \omega_1(v, t, x) dv, \omega_1(\tau, t, x), \omega_2(\tau, t, x), \dots, \omega_n(\tau, t, x)) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Система интегральных уравнений (8) при $t=\tau$ совпадает с системой интегральных уравнений (3). Согласно (7) имеем $\omega_i(t, t, x) = \vartheta_i(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Итак достаточно доказать существование решение системы интегральных уравнений (8).

Запишем систему интегральных уравнений (8) в виде одного векторного равенства

$$\theta = A\theta, \quad (9)$$

в котором $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ - вектор-функция переменных (s, t, x) , компоненты которой есть искомые функции $\theta_1 = \omega_1(s, t, x)$, $\theta_2 = \omega_2(s, t, x)$, ...,

$\theta_n = \omega_n(s, t, x)$, а компоненты оператора $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ определяются равенствами:

$$\begin{aligned} A_i \theta &= \varphi_i(x - \int_0^t \theta_1(v, t, x) dv) + \int_0^s f_i(\tau, x - \\ &- \int_\tau^t \theta_1(v, t, x) dv, \theta_1(\tau, t, x), \theta_2(\tau, t, x), \dots, \theta_n(\tau, t, x)) d\tau, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Покажем, что уравнение (9) имеет в области $G_2(T)$ при $T < T_*$ единственное, непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|\theta - \theta_0\| \leq M$.

Норму определим равенством

$$\|\theta\| = \max_{0 \leq i \leq n} \max_{(t,x) \in G_2(T)} \{|\theta_i|, \quad i=1,2,\dots,n\}.$$

Покажем при $T < T_*$ оператор A отображает шар $S(\theta_0, M)$ в себя

$$|A_i \theta - \varphi_i| \leq \|f_i\| T, \quad i=1,\dots,n.$$

Оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(\theta_0, M)$. Для доказательства этого возьмем произвольные n элементов $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n \in S(\theta_0, M)$ и оценим норму разности между их образами $A\theta^1, A\theta^2, \dots, A\theta^n$. Обозначим компоненты элементов $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ через $\theta_i^1, \theta_i^2, \dots, \theta_i^n \quad i=1,2,3$.

Справедливы следующие оценки

$$|A_i \theta^1 - A_i \theta^2| \leq \Omega_i(T) \|\theta^1 - \theta^2\|,$$

где

$$\Omega_i(T) = (L_i + M_1^i + \dots + M_N^i)T + M_0^i \frac{T^2}{2}.$$

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{1/\|f_i\|, T_i\}$, где T_i – положительный корень уравнения $\Omega_i(T) = 1$, осуществляет сжатое отображение шара $S(\theta_0, M)$ на себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений уравнение (9) имеет одно и только одно решение.

Список использованной литературы:

1. Иманалиев М.И. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С.1111–1115.
2. Иманалиев Т.М. Метод дополнительного аргумента для решения линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1999. – Вып.28. – С. 279-284.
3. Иманалиев Т.М. Обоснование и развитие метода дополнительного аргумента для решения дифференциальных уравнений в частных производных: Автореф. дисс. ... докт. физ.-матем. наук. 01.01.02. [Текст] / Т.М. Иманалиев – Бишкек, 2000 – 25 с.