УДК 517.928

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ
ЧЕКТЕЛБЕГЕН ЧЕЧИМИ МЕНЕН ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ, СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕ
NON-LINEAR PARTIAL OPERATORNO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER WITH UNLIMITED SOLUTIONS

Аширбаева А.Ж., Мамазиаева Э.А.

Аннотации: Построено решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка на основе метода дополнительного аргумента.

Кошумча аргумент киийрүү усулунун негизинде, экинчи тартиптеги сызыктуу эмес, жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин чечими тургузулган.

Formation of the solutions non-linear partial operatorno-differential equations of second order by means of the method of additional argument

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение, интегро–дифференциальное уравнение, метод дополнительного аргумента, принцип сжимающих отображений.

Урунттуу сөздөр: жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, сызыктуу эмес теңдеме, интегро-дифференциалдык теңдеме, кошумча аргумент кийирүү усулу, кысуучу чагылтуулардын принциби.

Key words: partial differential equation, non-linear equation, integro-differential equation, method of additional argument, contracting mappings principle.

Основы метода дополнительного аргумента созданы в монографии М. И. Иманалиева [1].

В работе [2] рассмотрены дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом. Методом дополнительного аргумента доказано существование и единственности решения.

В работе [3] метод был распространен на нелинейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка с частными производными под знаком интеграла, с вырожденным ядром и с другими особенностями, а также на уравнения со многими пространственными переменными.

В настоящее время идея метода дополнительного аргумента находит свое применение при исследовании нелинейных дифференциальных уравне-ний высших порядков. Изучению таких уравнений посвящены работы М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, Т.М. Иманалиева, А.Ж. Аширбаевой.

Имеются такие классы дифференциальных и интегро-дифференци-альных уравнений в частных производных второго порядка, которые представляют теоретический интерес.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right] - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + f(t), \qquad (1)$$

$(t,x) \in G_2(T) = [0,T] \times R,$

с начальными условиями

$$u(0,x)=x, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}=-x. \tag{3}$$

Будем пользоваться обозначением:

$$p(\tau,t,x;u)=x+\int_{\tau}^{t}u(s,\,p(s,t,x;u))ds, \tag{4}$$

$(\tau,t,x)\in Q_2(T)=\{0\le\tau\le t\le T,\ x\in R\}.$

Для $p(\tau,t,x;u)$ справедливо тождество

$p(\tau,t,p(t,\theta,x;u);u)=p(\tau,\theta,x;u),\quad (\tau,t,\theta,x)\in Q_3(T)=\{0\le\tau\le t\le\theta\le T,\ x\in R\}.$

Введя обозначение $v(\tau,t,x)=u(\tau,\,p(\tau,t,x;u))$ в (4), имеем стандартное обозначение метода дополнительного аргумента:

$$p(\tau,t,x;v(\rho,t,x):\rho)=x+\int_{\tau}^{t}v(\rho,t,x)d\rho, \tag{5}$$

и общее уравнение метода дополнительного аргумента:

$$u(t,x)=v(t,t,x) \tag{6}$$

Для решения задачи (1)-(3) используем приведенную в [4] общую схему исследования нелинейных дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка на основе метода дополнительного аргумента.

Введя обозначение

$$z(t,x;u)=D[u(t,x)]u(t,x),$$

$$D[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial x},$$

запишем уравнение (1) в виде

$$D[-u(t,x)]z(t,x;u)=f(t). \tag{7}$$

Уравнение (7) с начальными условиями (2), (3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению уравнения

$$z(t,x;u)=\int_{0}^{t}f(s)ds. \tag{8}$$

В самом деле, применяя дифференциальный оператор *D[–u(t,x)]* к обеим сторонам (8), получаем (7).

Полагая *t=0* в (8), получаем начальное условие *z(0,x;u)=0*.

Задача (8)-(2)-(3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегрального уравнения

$$u(t,x)=p(0,t,x;v)+\int_{0}^{t}(t-\rho)f(\rho)d\rho,(\tau,t,x)\in Q_3(T). \tag{9}$$

Из (9) имеем

$$v(\tau,t,x)=p(0,t,x;v)+\int_{0}^{\tau}(\tau-\rho)f(\rho)d\rho.$$

Отсюда получаем интегральное уравнение

$$v(\tau,t,x)=x-\int_0^t v(\rho,t,x))d\rho+\int_0^\tau(\tau-\rho)f(\rho)d\rho\,.$$

Интегрируя по τ от *0* до *t*, имеем:

$$\int_0^t v(\rho,t,x)d\rho=t(x-\int_0^t v(\rho,t,x)d\rho)+\int_0^t\int_0^s(s-\rho)f(\rho)d\rho ds\,.$$

Находим

$$\int_0^t v(\rho,t,x)d\rho=[tx-\int_0^t\int_0^s(s-\rho)f(\rho)d\rho\,ds]\frac{1}{1+t}.$$

Следовательно, решение поставленной задачи имеет вид:

$$u(t,x)=\frac{x}{1+t}-\frac{1}{1+t}\int_0^t\int_0^s(s-\nu)f(\nu)d\nu ds+\int_0^t(t-\nu)f(\nu)d\nu. \tag{10}$$

Обозначим линейный оператор

$$W(t;f(\nu):\nu)=-\frac{1}{1+t}\int_0^t\int_0^s(s-\nu)f(\nu)d\nu ds+\int_0^t(t-\nu)f(\nu)d\nu, \tag{11}$$

тогда получаем:

$$u(t,x)=\frac{x}{1+t}+W(t;f(\nu):\nu).$$

(12)

Итак, имеет место явление линейности пространства решений нелиней-ной задачи (8)-(2)-(3).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t^2}=u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+F(t;u(s,\xi):s,\xi), \tag{13}$$

$(t,x)\in G_2(T)$, оператор $F(t;u(s,\xi):s,\xi)$, записан в виде: функция каких переменных получается; на функцию скольких переменных действует оператор (по аналогии с записью интегралов); связанные переменные в этой функции,

с начальными условиями (2)-(3).

Обозначая

$$w(t)=u(t,x)-\frac{x}{1+t},$$

из (12) получаем уравнение

$$w(t)=W(t;F(\nu;\frac{\xi}{1+\nu}+w(\nu):\xi):\nu). \tag{14}$$

Если это операторно-интегральное уравнение имеет решение, то оно дает решение задачи (13)-(2)-(3).

$C^{(k)}(\Omega)$ - пространства функций, определенных и непрерывных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка *k)* на *Ω;*

ТЕОРЕМА. Если 1) оператор *F*– непрерывный по первой и второй переменной; 2) существует такое $L>0$, что для любого $T^*\leq T$

$$\|F(t,x;u_1(s,\xi):s,\xi)-F(t,x;u_2(s,\xi):s,\xi)\|_{G_2(T^*)}\leq L\|u_1(t,x)-u_2(t,x)\|_{G_2(T^*)}\,.$$

3) Значение оператора $F(t;\frac{\xi}{1+t}:\xi)$ определено для всех $t \in [0,T]$ (функция $\frac{x}{1+t}$ входит в область определения оператора F);

то существует такое $T^* \leq T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (13)-(2) -(3) имеет решение $u(t,x) \in C^{(1)}(G_2(T^*))$.

Доказательство. Оценим

$$\left|W(t;f(v):v)\right| \leq \left|\int_0^t\int_0^s (s-v)f(v)dvds\right| + \left|\int_0^t (t-v)f(v)dv\right| \leq$$

$$\leq \frac{t^3}{3}\|f\|_{[0,t]} + \frac{t^2}{2}\|f\|_{[0,t]} \leq T^*\left(\frac{T^2}{3}+\frac{T}{2}\right)\|f\|_{[0,T^*]}.$$

Таким образом, при достаточно малом T^* будет

$$\|W(t;f)\|_{[0,T^*]} \leq \frac{1}{2}\|f\|_{[0,T^*]}.$$

Отсюда

$$\left|W(t;F(v;\frac{\xi}{1+v}+w(v):\xi):v)\right| \leq \left|W(t;F(v;\frac{\xi}{1+v}:\xi):v)\right| + \frac{1}{2}\|w\|_{[0,T^*]} \leq w_0 + \frac{1}{2}\|w\|_{[0,T^*]},$$

где $w_0 = const < \infty$ в силу условия 3) Теоремы.

Из последних двух оценок, вследствие принципа сжимающих отображений, вытекает существование решения уравнения (14). Теорема доказана.

Список использованной литературы:

1. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М.И. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. –112 с.
2. Иманалиев М.И. О дифференциальном уравнении в частных производ-ных первого порядка с интегральным коэффициентом [Текст] / М.И. Има-налиев, Ю.А. Ведь //Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 3. – С. 465–477.
3. Аширбаева А.Ж. Развитие метода дополнительного аргумента для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных произ-водных: Автореф. дисс. … канд. физ.–матем. наук. 01.01.02. [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек, 1995. – 15 с.
4. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.