

УДК: 517.928

СЕКИРИК ОКУЯСЫ ҮЧҮН РЕЙСТИН МОДЕЛДИК ТЕҢДЕМЕСИ ЖАНА АНЫН
ЖАЛПЫЛАНЫШЫ. АЛАРДЫН ЧЕЧИМИН ПАРАМЕТРЛЕШТИРҮҮ ЖАНА
АСИМПТОТИКАСЫ
МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РЕЙСА ДЛЯ ЯВЛЕНИЯ СКАЧКА И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ.
ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ИХ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИКА
MODEL EQUATION FOR THE OF THE JUMP ANPHENOMENONAND ITS
GENERALIZATION. PARAMTRIZATION AND ASYMPTOTICS

Алымкулов К. ОшМУнун профессору

e.mail: keldibay@mail.ru

Кожобеков К.Г. ОшМУнун профессору

e.mail: kudayberdi.kojobekov@oshsu.kg

Азимов Б.А. ОШМУнун доцент

e.mail: azimov@oshsu.kg

Аннотация: Мында Рейс теңдемесинин асимптотикасын тургузуу үчүн Жаңы параметрлештирүү теңдемеси сунушталды жана анын жардамы менен ал теңдеменин чечиминин асимптотикасы эсептелди.

Аннотация: Здесь для уравнения Рейсса предложена новое уравнение для параметрического представления его решения. И на основе этого представления, получена новое асимптотическое представление решения. Также предложено новое обобщенное уравнение Рейсса для явления прыжка.

Annotation: Here, for the Reiss equation, a new equation is proposed for the parametric representation of its solution. And on the basis of this representation, a new asymptotic representation of the solution is obtained. A new generalized Reiss equation for the jump phenomenon is also proposed

Ачкыч сөздөр: Моделдик теңдеме, параметрлештирүү, асимптотик а.

Ключевые слова: Модельное уравнение, а, параметризация, асимптотик.

Key words: Model equation, parametrization, asymptotic.

1. Введение.

В [1] американский математик Reiss предложил модельное уравнения для явления скачка

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^2(t)(1 - y(t)), y(0) = \varepsilon \quad (1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Построению асимптотики решения этой задачи посвящены работы [1 – 2], [8].

Здесь предлагается новое параметризация решения этой задачи. В [8] предложена другая параметризация и получена двух зонная асимптотика.

2. Исторический обзор метода параметризации

Известно, что неявное уравнение окружности, $x^2 + y^2 = 1$, если их решать явным образом, то получается негладкое решение, если же его уравнения параметризовать, то получаем аналитическое выражения.

Для возмущенных дифференциальных уравнений, по видимому, впервые параметризация периодического решения, получил А.Пуанкаре для уравнения Дуффинга

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon y^3 + y(x) = 0 \quad (2)$$

Для этого уравнения ищется 2π – периодическое решение. Его параметрическое решение можно представить в виде

$$y(t) = y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \varepsilon^2 y_2(\xi) + \dots \quad (3)$$

$$t = \xi + \varepsilon t_1(\xi) + \varepsilon^2 t_2(\xi) + \dots$$

где $y_j(\xi) (j = 1, 2, \dots)$, $t_j(\xi) - 2\pi$

периодические функции. Если же искать 2π – периодическое решение в виде

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots$$

то в виде функции

$$y_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

появляются секулярные члены и это ряд не является равномерно асимптотическим рядом.

Затем 1948 году в [3] английский механик, и математик Д.Ж.Лайтхилл, внес большой вклад в развитие метода Пуанкаре. Он рассматривал, в частности, сингулярно возмущенное уравнение

$$(x + \varepsilon u(x)) \frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = r(x) \quad (4)$$

$$u(1) = y^0$$

где y^0 – заданная постоянная $p(x), r(x)$ аналитические функции на отрезке $[0, 1]$. Он предложил искать параметрическое решение задачи (4) в виде

$$y(x) = y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \varepsilon^2 y_2(\xi) + \dots \quad (5)$$

$$x(\xi) = \xi + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + \dots$$

и чтобы это решение давало равномерно пригодное представление решение задачи (4), на отрезке $\xi \in [\xi_0(\varepsilon), 1]$, где $\xi_0(0) = 0$.

Дальнейшее обобщение метода Лайтхилла был сделан в [], где параметрическое решение уравнения получено из явного уравнение

$$\xi \frac{dy}{d\xi} = -q(x(\xi))y(\xi) + r(x(\xi)), \quad y(1) = y^0,$$

$$\xi \frac{dx}{d\xi} = x(\xi) + \varepsilon y(\xi), \quad x(1) = 1 \quad (6)$$

Это уравнения названа по предложению

Темпла униформизованным уравнением для задачи (4).

Простой пример

$$(x + \varepsilon y(x)) \frac{dy}{dx} + y(x) = 0, \quad y(0) = b \quad (7)$$

b – заданная постоянная, дает прекрасный пример методу параметризации.

Уравнение (7) решается точно

$$y = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{x^2 + \varepsilon(2 + \varepsilon b)} \quad (8)$$

Ясно, что это решение существует на отрезке $[0,1]$. Асимптотику разложения можно получить методом Лайтхилла или методом параметризации

$$\begin{cases} \xi \frac{dy}{d\xi} = -y(\xi), & y(1) = b \\ \xi \frac{dx}{d\xi} = x + \varepsilon y(\xi), & x(1) = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Решая задачи (9) получим $y(\xi) = \frac{b}{\xi}$ (10)
 $x(\xi) = \xi(1 + b\varepsilon 2^{-1}) - \varepsilon(2\xi)^{-1}$

Исключая из (10) переменную ξ получим точное решение (8) задачи (7).

ТЕПЕРЬ вернемся к задаче Рейса (1). За параметризованное уравнение для (1) берем уравнение

$$\frac{dy(\xi)}{d\xi} = y(\xi)(1 - y(\xi)), \quad y(0) = \varepsilon \quad (11.1)$$

$$\frac{dt(\xi)}{d\xi} = (y(\xi))^{-1}, \quad t(0) = 0 \quad (11.2)$$

Решая (11.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y(1-y)} &= \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right] dy = d\xi \Rightarrow \\ \ln \frac{y}{1-y} * \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} &= \xi \Rightarrow \\ \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-y)} &= e^\xi \\ \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} y &= e^\xi - e^\xi y \Rightarrow \\ \left[\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} + e^\xi \right] y &= e^\xi \Rightarrow \\ y(\xi) &= \frac{e^\xi}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + e^\xi} = \frac{\varepsilon e^\xi}{1-\varepsilon + \varepsilon e^\xi} \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11.2) и решая его

$$\begin{aligned} \frac{dt(\xi)}{d\xi} &= \frac{1-\varepsilon + \varepsilon e^\xi}{\varepsilon e^\xi} = 1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} e^{-\xi} \Rightarrow \\ t(\xi) &= \xi + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} [1 - e^{-\xi}] \end{aligned}$$

таким образом параметрическое представление задачи (1) – (2) представляется в виде

$$y(\xi) = \frac{\varepsilon e^\xi}{1-\varepsilon + \varepsilon e^\xi} = \frac{1}{1 + \varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)e^{-\xi}} \quad (13.1)$$

$$t(\xi) = \xi + (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}(1 - e^{-\xi}) \quad (13.2)$$

из (13) вытекает, что при $\xi \in [0, \infty)$, t – также изменятся на отрезке $[0, \infty)$. Функция $y(\xi)$ изменяется от ε до единицы. Поэтому задача (1) эквивалентно к задаче (11).

Так как

$$t'(\xi) = 1 + (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}e^{-\xi} > 0$$

из (13.2) вытекает что на отрезке $[0, \infty)$, переменная t меняется на промежутке $[0, t_0)$, где $t_0 = 1 + \frac{(1-e^{-1})(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$, а затем экспоненциально быстро перейдет в точку равновесия $y = 1$.

4. Обобщение модельного уравнения Рейса .

Рассмотрим уравнения

$$\frac{dy}{d\xi} = y^n(t)(1 - y(t)), \quad y(0) = \varepsilon, \quad (14)$$

$n \in \mathbb{N}, n > 2$. Решение задачи (14) параметризуем следующим уравнением

$$\frac{dy}{d\xi} = y(\xi)(1 - y(\xi)), \quad y(0) = \varepsilon \quad (15)$$

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{y^{n-1}(\xi)}, \quad t(0) = 0$$

Решая эти задачи имеем

$$y(\xi) = \frac{\varepsilon e^\xi}{1 - \varepsilon + \varepsilon e^\xi} \quad (16)$$

$$\frac{dt}{d\xi} = \left(1 + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} e^{-\xi}\right)^{n-1}$$

Использованные источники:

1. Reiss. S.L. New asymptotic methods for jump phenomena SIAM J. Appl. Math., 1980, v.39, №3, P.440-455
2. R Kasso A note on asymptotic methods for jump phenomena. SIAM J. Appl. Math., 1982, v. 42 № 3, P. 926-932.
3. Light hill M.J., “A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid,” Philos. Mag. (7) 40, 1179–1201 (1949).
4. Алымкулов К. The method of uniformization and justification of Light hill method (in Russian). Izvestia AN KyrgSSR, 1981, № 1. pp. 35-38.
5. Alymkulov K and Tursunov T.D Perturbed Differential Equations with Singular Points in book “Recent Studies in Perturbation Theory”, Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov, , Publisher InTech, 2017.
6. Алымкулов, К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач – Бишкек: Илим, 1992. – 108 с.
7. Алымкулов, К. Метод униформизации и обоснование метода Лайтхилла // Известия АН Кирг ССР, 1981. № 1. – С. 35-38.
8. Алымкулов К. Кожобеков К.Г, об асимптотике решения задачи Рейсса для явления прыжка [Текст] // Вестник ЖАГУ, 2019, №2(41). – С. 3-6.
9. Кожобеков К.Г. Равномерная асимптотика решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, Дисс. на соискание степени доктора наук, 2020, Бишкек.

* * *

УДК: 517.928

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
ӨЗГӨЧӨ КОЗГОЛГОН ЖЫЛУУЛУК ТАРКАЛГАН НАЗАРИЯТТАГЫ ТЕҢДЕМЕНИН
ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ
ON THE ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF ONE SINGULARLY PERTURBED
EQUATION FROM THE THEORY OF HEAT CONDUCTIVITY

Алымкулов К.ОшМУнун профессору

e.mail: keldibay@mail.ru

Кожобеков К.Г. ОшМУнун профессору

e.mail: kudayberdi.kojobekov@oshsu.kg

Султанова Н.З. - ОГПИ

e.mail: nasiipa@mail.ru

Аннотация: Мында жылуулук откөрүүсүндө пайда болгон чектик сингулярдуу козголгон маселенин чечиминин асимптоикасын тургузуу маселеси каралды. Алгач бул маселенин кичине параметр биринчи жакындатылышы классикалык кичине параметр менен катардын өзгөчө чекитине чейин тургузулуп, андан соң асимптотикалык катар, бүткүл аймака узартылды. Бүткүл асимптотикалык катарды алуу үчүн Грин функция усулу колдонулду.

Аннотация: Здесь рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача появляющаяся в теории распространения тепла. Сначала асимптотика первого порядка по малому параметру, строится методом малого параметра до особой точки ряда, затем этот ряд продолжится на весь отрезок. Что бы получить полную асимптотик применяется метод функций Грина.

Annotation: A model equation for heat propagation in a sphere with a small parameter is considered. Using the Green's function method, the complete asymptotic behavior of the solution in the asymptotic expansion in the asymptotic succession of the small parameter multiplied by the logarithm of the inverse power of the small parameter is obtained.

Ачкыч сөздөр: Сферадагы жылуулуктун таралышы жөнүндөгү моделдик теңдеме, Грин функциясы усулу.

Ключевые слова: Модельное уравнение для распространение тепла на сфере, метод функции Грина.

Key words: Model equation for heat propagation on a sphere, Green's function method

1. Введение

В [1] рассмотрено следующее модельное уравнения для распространения тепла в сфере с малым параметром и с особой точкой

$$x^2 y'' = \varepsilon y y', \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \quad (1)$$

и была попытка получить асимптотику первого порядка по малому параметру, решения этого уравнения методом сращивания, без обоснования оценки остаточного члена по

малому параметру. Здесь мы получим асимптотику решения этой задачи любого порядка по малому параметру. Сначала методом сращивания получим асимптотику решения первого порядка, затем методом функции Грина полную асимптотику решения этой задачи.

2. Метод малого параметра

Если искать решение этой задачи в виде

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \quad (2)$$

тогда для неопределенных функций y_0, y_1, y_2, \dots

получаем, следующие задачи

$$x^2 y_0'' = 0, \quad y_0(0) = 1, \quad y_0(1) = 0, \quad (3.0)$$

$$x^2 y_1' = y_0 y_0', \quad y_1(0) = y_1(1) = 0, \quad (3.1)$$

$$x^2 y_2' = y_0 y_1' + y_0' y_1, \quad y_2(0) = y_2(1) = 0, \quad (3.2)$$

$$x^2 y_3'' = y_0 y_2' + y_1 y_1' + y_0' y_2, \quad y_3(0) = y_3(1) = 0, \quad (3.3)$$

.....

$$x^2 y_m'' = \sum_{i+j=m-1} y_i y_j', \quad y_m(0) = y_m(1) = 0. \quad (3.m)$$

Из (3.0) имеем $y_0(x) = a_0 x + b_0$, где a_0, b_0 – произвольные постоянные.

Удовлетворяя начальные условия имеем

$$y_0(x) = 1 - x,$$

Тогда для $y_1(x)$ имеем задачу

$$x^2 y_1''(x) = -1 + x, \quad y_1(0) = y_1(1) = 0$$

Отсюда, имеем

$$y_1(x) \sim \ln x, \quad y_1'(x) \sim \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Аналогично определяем остальные функции $y_2(x) \sim \frac{1}{2x}, y_2'(x) \sim \frac{1}{2x^2}, x \rightarrow 0$ (4.2)

$$y_3(x) = \frac{-1}{3! \cdot 2x^2}, \quad y_3'(x) = \frac{1}{3!} x^{-3}, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

$$y_4(x) = \frac{1}{4!3} x^{-3}, \quad y_4'(x) = -\frac{1}{4!} x^{-4}, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

$$y_5(x) = -\frac{1}{5!4} x^{-4}, \quad y_5'(x) \sim \frac{1}{5!} x^{-5}, \quad x \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

.....

$$y_m(x) = \frac{1}{m!(m-1)} x^{-m+1}, \quad y_m'(x) \sim (-1)^{m-1} \frac{1}{m!} x^{-m}, \quad x \rightarrow 0$$

Таким образом ряд (2) при $x \rightarrow 0$ имеет 2 асимптотику

$$y(x) \sim 1 - \varepsilon \ln x + \varepsilon^2 \frac{1}{2x} - \varepsilon^3 \frac{1}{3!2x^3} + \frac{\varepsilon^4}{4!3} x^{-3} + \varepsilon^m (-1)^m \frac{1}{m!(m-1)} x^{-m-1} + \dots =$$

$$= 1 - \varepsilon \ln x + \frac{\varepsilon^2}{x} \left[1 - \varepsilon \frac{1}{2 \cdot 3!x} + \frac{\varepsilon^2}{5 \cdot 4!x^2} + \dots + (-1)^m \frac{\varepsilon^{m-2}}{(m-1) \cdot m!x^{m-2}} + \dots \right]$$

$$y'(x) \sim -1 + \frac{\varepsilon}{x} - \frac{\varepsilon^2}{2!x^2} + \frac{\varepsilon^3}{3!x^3} - \frac{\varepsilon^4}{4!x^4} + \dots + \frac{1}{m!} \left(\frac{\varepsilon}{x^m} \right)^m - \varepsilon \ln x + \dots, \quad x \rightarrow 0 \quad (5)$$

или

$$y'(x) \sim -e^{-\frac{\varepsilon}{x}} - \varepsilon \ln x, \quad x \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

Очевидно, что это ряд является асимптотическим только на отрезке $(\varepsilon, 1]$.

Теорема 1. Решение задачи (1) удовлетворяющее условию $y(1) = 0$ является асимптотическим рядом только на полуотрезке $(\varepsilon, 1]$.

Полное доказательство можно доказать переходя к интегральной уравнению из (1).

Решение (5) является Внешним решением задачи (1). Это решение (5) можно продолжить асимптотически до точки $x=0$.

Действительно, интегрируя (5.1) имеем

$$y(x) \square - \int_1^x e^{-\frac{\varepsilon}{t}} dt - \int_1^x \varepsilon \ln t dt = 1 - \varepsilon \ln \varepsilon + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (6)$$

Дальнейшую асимптотику трудно вычислить этим методом малого параметра. Оказывается, асимптотику этого решения любого порядка этой задачи можно построить методом функции и Грина.

3. Метод функций Грина

Если сделать подстановку в (1)

$$y(x) = 1 + u(x), \quad (7)$$

то задача (1) приводится к виду

$$\frac{x^2 d^2 u(x)}{dx^2} = \varepsilon(1 + u(x))u'(x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = -1. \quad (8)$$

Решение задачи (8) ищем в виде

$$u(x) = u_0(x, \varepsilon) + u_1(x, \varepsilon) + u_2(x, \varepsilon) + \dots + u_m(x, \varepsilon) + \dots, \quad (9)$$

где $u_k(x, \varepsilon)$ ($k = 1, 2, \dots$) пока неопределенные функции и они являются асимптотическими последовательностями, т.е.

$$u_{k+1}(x, \varepsilon) = O(u_k(x, \varepsilon)), \quad \forall x \in [0, 1], \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Подставляя (9) в (8) имеем следующие задачи

$$Lu_0(x, \varepsilon) = \frac{x^2 d^2 u_0}{dx^2} - \frac{\varepsilon du_0(x, \varepsilon)}{dx} = 0, \quad u_0(0, \varepsilon) = 0, \quad u_0(1, \varepsilon) = -1 \quad (10.0)$$

$$Lu_1(x, \varepsilon) = \varepsilon u_0(x, \varepsilon) \frac{du_0(x, \varepsilon)}{dx}, \quad u_1(0, \varepsilon) = u_1(1, \varepsilon) = 0, \quad (10.1)$$

$$Lu_2(x, \varepsilon) = \varepsilon u_0(x, \varepsilon) \frac{du_1(x, \varepsilon)}{dx} + \varepsilon \frac{du_0(x, \varepsilon)}{dx} u_1(x, \varepsilon), \quad u_2(0, \varepsilon) = u_2(1, \varepsilon) = 0, \quad (10.2)$$

.....

$$Lu_m(x, \varepsilon) = \sum_{\substack{i+j=m-1 \\ i, j \geq 0}} \varepsilon u_i(x, \varepsilon) \frac{du_j(x, \varepsilon)}{dx}, \quad u_m(0, \varepsilon) = u_m(1, \varepsilon) = 0 \quad (10.m)$$

Последовательно решаем эти задачи.

За линейно независимые решения уравнения (10.0) берем

$$X(x) = A \int_0^x e^{-\varepsilon/s} ds, \quad X(1) = 1, \quad X(0) = 0, \quad (11)$$

$$Y(x) = A \int_x^1 e^{-\varepsilon/s} ds, \quad Y(1) = 0, \quad Y(0) = 1. \quad (12)$$

где $A = A(\varepsilon) = e^{-\varepsilon} + \varepsilon \ln \varepsilon + O(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \ln \varepsilon + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$

Отсюда

$$Y(x) = 1 + A \int_x^0 e^{-\varepsilon/s} ds = 1 - X(x) \Rightarrow, \quad (13)$$

$$Y(x) + X(x) = 1. \quad (14)$$

Нам нужна следующие леммы.

Лемма1: Функция Грина для краевой задачи

$$Lz(x, \varepsilon) = x^2 \frac{d^2 z(x, \varepsilon)}{dx^2} - \varepsilon z(x, \varepsilon) = 0, \quad z(0, \varepsilon) = z(1, \varepsilon) = 0 \quad (15)$$

имеет вид

$$G(x, s, \varepsilon) = \begin{cases} C X(x) Y(s), & 0 \leq x \leq s, \\ C X(s) Y(x), & s \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (16)$$

где $C = -A^{-1}.$

Доказательство. Уравнение запишем в симметричном виде

$$Mz(x, \varepsilon) = \frac{d}{dx} \left(e^{\varepsilon/x} \frac{dz(x, \varepsilon)}{dx} \right) = 0.$$

По определению функции Грина для краевой задачи (15)

$$G_x(s+0, s, \varepsilon) - G_x(s-0, s, \varepsilon) = e^{-\varepsilon/s}. \quad (17)$$

Поэтому, имеем $C[X(s)Y'(s) - X'(s)Y(s)] = C[-AX(s)e^{-\varepsilon/s} - A(s)e^{-\varepsilon/s}Y(s)] =$

$$= -CAe^{-\varepsilon/s} [X(s) + Y(s)] = -CAe^{-\varepsilon/s} \stackrel{(14)}{=} e^{-\varepsilon/s}.$$

Отсюда, получим $C = -A^{-1}$.

Лемма2. Решение неоднородной краевой задачи

$$Lz(x, \varepsilon) = f(x), \quad z(0, \varepsilon) = z(1, \varepsilon) = 0, \quad (18)$$

где $f(x) \in C[0,1]$, запишется в виде

$$z(x, \varepsilon) = \int_0^1 G(x, s, \varepsilon) e^{\varepsilon/s} s^{-2} f(s) ds. \quad (19)$$

Утверждение леммы проверяется подстановкой (19) в уравнение (18).

Решение задачи (10.1) запишется в виде

$$u_1(x, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^1 e^{\varepsilon/s} s^{-2} G(x, s, \varepsilon) u_0(s, \varepsilon) u_0'(s, \varepsilon) ds. \quad (20)$$

Очевидно, за решение $u_0(x)$ можно взять, $u_0(x) = -X(x)$, причем $X(x)$ можно переписать в виде

$$X(x) = A \int_0^x e^{-\varepsilon/s} ds = \left| \varepsilon / s = t, \quad s = \varepsilon t^{-1} \right| = -A\varepsilon \int_{\infty}^{\varepsilon/x} e^{-t} \frac{1}{t^2} dt.$$

Отсюда

$$X'(x) = Ae^{-\varepsilon/x} x^2 \varepsilon^{-2}, \quad u_0(x) = -A\varepsilon \int_{\infty}^{\varepsilon/x} e^{-t} t^{-2} dt, \quad (18)$$

$$u_0'(x) = Ae^{-\varepsilon/x} x^{-2} \varepsilon^{-1}. \quad (19)$$

Поэтому учитывая (18)-(19) выражение (20) запишем в виде

$$u_1(x) = \varepsilon \int_0^1 G(x, s, \varepsilon) e^{\varepsilon/s} s^{-2} u_0(s) u_0'(s) ds = \varepsilon C \int_0^x Y(x) X(s) e^{\varepsilon/s} s^{-2} u_0(s) u_0'(s) ds +$$

$$+ \varepsilon C \int_x^1 X(x) Y(s) e^{\varepsilon/s} s^{-2} u_0(s) u_0'(s) ds = \left| u_0(x) = -X(x) = -A \int_0^x e^{-\varepsilon/s} ds \right| =$$

$$= \varepsilon \int_0^x Y(x) X(s) s^{-2} u_0'(s) u_0(s) ds + \varepsilon \int_x^1 X(x) Y(s) u_0'(s) s^{-2} u_0(s) ds.$$

$$|u_1(x)| \leq \varepsilon \int_0^x X(s) ds + \varepsilon \int_x^1 X(s) s^{-2} ds = \varepsilon \int_0^1 X(s) ds = A\varepsilon^{-1} \int_0^1 \int_{\infty}^{\varepsilon/s} e^{-t} t^{-2} dt ds =$$

$$= \left| \frac{\varepsilon}{s} = \rho \right| = -Ae^{-1} \int_0^{\varepsilon} \int_0^{\rho} e^{-t} t^{-2} dt ds = \left| u = -\int_0^{\rho} e^{-t} t^{-2} dt, \quad dv = d\rho, \quad v = \rho \right| =$$

$$= -A\rho\varepsilon \int_0^{\rho} e^{-t} t^{-2} dt \Big|_0^{\varepsilon} + A\varepsilon \int_{\infty}^{\varepsilon} e^{-\rho} \rho^{-1} d\rho = A \int_{\infty}^1 e^{-\rho} \rho^{-1} d\rho + A \int_1^{\varepsilon} e^{-\rho} \rho^{-1} ds =$$

$$= AA^X + A \int_1^{\varepsilon} (e^{-\rho} - 1) \rho^{-1} ds \leq -\varepsilon A \ln \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad \text{имеет} \quad \text{место} \quad \text{оценка}$$

$$|u_1(x)| \leq \left| \int_0^1 X(s) ds \right| \leq B = B(s) = A(s) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (21)$$

Для производной функции $u_1(x)$ имеем оценку

$$\begin{aligned} |u_1'(x)| &\leq \left| \varepsilon \int_0^x G_x(x, s, \varepsilon) e^{\varepsilon/s} s^{-2} u_0(s) u_0'(s) ds + \varepsilon \int_x^1 G_x(x, s, \varepsilon) e^{\varepsilon/s} s^{-2} u_0(s) u_0'(s) ds \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \left| \int_0^x Y'(x) X(s) |u_0(s)| ds \right| + \varepsilon \left| \int_x^1 X'(x) Y(s) |u_0(s)| ds \right| \leq \varepsilon \int_0^x X'(x) X(s) ds + \\ &+ \varepsilon \int_x^1 X'(x) X(s) ds \leq A \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon/x} x^2 \varepsilon^{-2}, \quad \text{т.е.} \\ |u_1'(x)| &\leq A \varepsilon^{-1} \ln \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon/x} = B(\varepsilon) e^{-\varepsilon/x} x^2, \end{aligned} \quad (22)$$

где $B = B(\varepsilon) = A \varepsilon^{-1} \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

Тепер оценим решение задачи (10.2), его решение представляется в виде

$$\begin{aligned} u_2(x, \varepsilon) &= \varepsilon \int_0^x G(x, s, \varepsilon) e^{\varepsilon/s} s^{-2} \left[u_0(s, \varepsilon) u_1'(s, \varepsilon) + u_0'(s, \varepsilon) u_1(s, \varepsilon) \right] ds = \\ &= \varepsilon C \int_0^x Y(x) X(s) e^{\varepsilon/s} s^{-2} \left[u_0(s, \varepsilon) u_1'(s, \varepsilon) + u_0'(s, \varepsilon) u_1(s, \varepsilon) \right] ds + \\ &+ \varepsilon \int_x^1 X(x) Y(s) e^{\varepsilon/s} s^{-2} \left[u_0(s) u_1'(s) + u_0'(s, \varepsilon) u_1(s, \varepsilon) \right] ds. \end{aligned}$$

Отсюда, используя формулы (18)-(21) и оценивая $u_2(x, \varepsilon)$ имеем

$$|u_2(x, \varepsilon)| \leq \int_0^x X(s) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} ds + \int_x^1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} X(s) ds = A(\varepsilon) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 X(s) ds = B^2(\varepsilon).$$

Теперь аналогичная оценка для $u_2'(x, \varepsilon)$ дает $|u_2'(x, \varepsilon)| \leq B^2(\varepsilon) x^2 e^{-\varepsilon/x}$.

Далее

$$\begin{aligned} |u_m(x, \varepsilon)| &\leq B^m(\varepsilon), \\ |u_m'(x, \varepsilon)| &\leq B^m(\varepsilon) x^2 e^{-\varepsilon/x}. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом решение (9) и его производная оценивается, следующими асимптотическими рядами

$$|u(x, \varepsilon)| \leq 1 + A(\varepsilon) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \dots + \left(A(\varepsilon) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^m + \dots$$

$$|u'(x, \varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\varepsilon/x} x^2 \left[A(\varepsilon) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \left(A(\varepsilon) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 + \dots + \left(A(\varepsilon) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^m + \dots \right]. \quad (24)$$

Очевидно, что эти ряды являются асимптотическими рядами Пуанкара. Мы даем формальное доказательство следующей теоремы.

Теорема. Решение задачи (1)-(2) можно разложить в асимптотический по асимптотической последовательности $\left\{ \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \right\}^m$ ($m = 0, 1, \dots$).

Полное доказательство можно провести методом мажоранты.

Использованные источники

1. William Paulsen *Asymptotic analysis and perturbation theory*, CRC Press, London, 2014.
2. Алымкулов К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач – Бишкек: Илим, 1992. – 108 с.
3. Alymkulov K and Tursunov T.D *Perturbed Differential Equations with Singular Points* in book “Recent Studies in Perturbation Theory”, Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov, , Publisher InTech, 2017.
4. Ovidiu Ciostin *Asymptotics and Borel summability*. CRC Press, London, 2009.

* * *

УДК: 53.072

МЕХАНИЧЕСКИЕ СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
МЕХАНИКАЛЫК ТАҢ КАЛЫШТУУ ТАРТЫП ЖАКЫНДАТКЫЧТАР ЖАНА АЛАРДЫ
МАТЕМАТИКАЛЫКЧАГЫЛДЫРУУ
MECHANICAL STRANGE ATTRACTORS AND THEIR MATHEMATICAL
PRESENTATION

П.С.Панков, Ж.К. Жээнтаева, С.Б. Тагаева
Институт математики НАН КР, КУУ, КГТУ им. И. Раззакова

Аннотация. Ранее методы реализации механических странных аттракторов были слишком сложными. В данной статье такое явление продемонстрировано через скатывание шарика по гладкой поверхности с тремя выступами под воздействием силы тяжести. Движение шарика оказывается непредсказуемым. В данной статье предложены другие системы дифференциальных и разностных уравнений для этой же цели. Такая поверхность была изготовлена из железа и испытана. Также в статье предложен новый вид асимптотической эквивалентности.

Аннотация. Мурунку механикалык таңкалыштуу тартып жакындаткычты жүзөгө ашыруунун ыкмалары өтө татаал болду. Бул макалада ал кубулуш үчур куюп турган жери болгон жылмакай бет боюнча тартуу күчүнүн таасиринен жумаланганы аркылуу

көрсөтүлөт. Топ кыймылдаганы алдын ала айтылбас экен. Дал келген дифференциалдык теңдемелер системасы түзүлдү жана компьютерде болжол менен чыгарылды. Мындай бет темирден жасалды жана сыналды. Дагы, макалада асимптотикалык эквиваленттиктин жаңы түрү сунушталды.

Annotation. Earlier methods to implement mechanical strange attractors were too complicated. In the paper this phenomenon is demonstrated as rolling of a ball along a smooth surface with three juts by gravity effect. The motion of the ball proves to be unpredictable. Other systems of differential equations are difference equations are proposed in this paper for same purpose. Such surface is made of iron and tested. Also, a new type of asymptotical equivalence is proposed in the paper.

Ключевые слова: аттрактор, гладкая поверхность, явление, дифференциальное уравнение, разностное уравнение, система уравнений, реализация, асимптотическая эквивалентность.

Урунттуу сөздөр: тартып жакындаткыч, жылмакай бет, кубулуш, дифференциалдык теңдеме, айырмалык теңдеме, теңдемелер системасы, жүзөгө ашыруу, асимптотикалык эквиваленттик

Key words: attractor, smooth surface, phenomenon, differential equation, difference equation, system of equations, implementation, asymptotical equivalence

Введение

Первым примером явления, названного «странным аттрактором», был аттрактор Лоренца, описываемый системой трех дифференциальных уравнений третьего порядка $x'(t)=10(y(t)-x(t)); y'(t)=x(t)(28-z(t))-y(t); z'(t)=x(t)y(t)-8/3 \cdot z(t)$.

Для его реализации требуется смесь трех химических компонент.

Соответственно появилось определение: странный аттрактор - притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве диссипативной динамической системы.

Другой объект - соленоид Смейла -Вильямса —динамическая система, аналогичной по поведению траекторий отображению удвоения на окружности, то есть с дискретным временем. Эта динамическая система определена на торе, и за одну её итерацию угловая координата удваивается; откуда автоматически возникает экспоненциальное разбегание траекторий и хаотичность динамики.

Отметим, что само это понятие странного аттрактора является не чем-то заданным заранее, а возникающим в различных условиях. Соответственно этому, и возникают различные определения, после обнаружения новых явлений.

Ранее в опубликованных работах (см. например [1], [2], [3]) предлагались сложные электротехнические устройства для его реализации. В [4] предложено устройство: бесконечная двигающаяся лента и стержень, закрепленный одним концом в точке над серединой ленты, другой конец которого двигается по ленте под влиянием силы трения.

На основе методики [5-6], с использованием опыта составления систем дифференциальных уравнений, моделирующих физические процессы, мы продемонстрировали такое явление через скатывание шарика по гладкой поверхности с тремя выступами под воздействием силы тяжести [7]. Движение шарика оказывается

непредсказуемым. Соответствующая система дифференциальных уравнений была составлена и приближенно решена на компьютере. Также, такая поверхность изготовлена из железа и испытана.

В данной статье предлагаются другие системы дифференциальных и разностных уравнений, дающие аналогичные явления.

Также в статье предложен новый вид асимптотической эквивалентности для представления странных аттракторов.

1. Составление системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим движение точки по гладкой поверхности, высота которой выражается формулой $z=Z(x,y)$, над горизонтальной плоскостью. Тогда получаем: вектор антиградиента

$$A(x,y) = -\{Z_x'(x,y), Z_y'(x,y), (Z_x'(x,y))^2 + (Z_y'(x,y))^2\}.$$

Разлагаем постоянный вектор гравитации $g=\{0,0,-1\}$ на касательный T и нормальный Q к поверхности.

$$T(x,y) = \frac{\langle A,g \rangle}{\langle A,A \rangle} A = \frac{(Z_x'(x,y))^2 + (Z_y'(x,y))^2}{(Z_x'(x,y))^2 + (Z_y'(x,y))^2 + ((Z_x'(x,y))^2 + (Z_y'(x,y))^2)} A(x,y) = (1)$$

$$= -\frac{1}{(Z_x'(x,y))^2 + (Z_y'(x,y))^2 + 1} \{-Z_x'(x,y), -Z_y'(x,y), (Z_x'(x,y))^2 + (Z_y'(x,y))^2\}.$$

Сила, действующая на точку, пропорциональна вектору $T(x,y)$.

Достаточно рассматривать ее компоненты, действующие по осям Ox и Oy , потому что из новых значений $X(t)$ и $Y(t)$ значение высоты получается из формулы $z=Z(x,y)$.

Используя второй закон Ньютона для движения точки в виде векторного уравнения $w''(t) = F(w(t))$, с начальными условиями $w(0)=w_0$, $w'(0)=v_0$, получаем систему уравнений

$$x''(t) = Z_x'(x(t), y(t)) / ((Z_x'(x(t), y(t)))^2 + (Z_y'(x(t), y(t)))^2 + 1), (2)$$

$$y''(t) = Z_y'(x(t), y(t)) / ((Z_x'(x(t), y(t)))^2 + (Z_y'(x(t), y(t)))^2 + 1).$$

Можно выбрать некоторое нечетное натуральное число $k>3$ и взять поверхность, задаваемую формулой

$$Z(x,y) = \sum_{j=1}^k \left((x - \cos(2\pi j/k))^2 + (y - \sin(2\pi j/k))^2 + 0.01 \right)^{-1} + x^2 + y^2. (3)$$

За начальное условие по координатам можно взять точку около

$$(-a;0), 0 < a < 1. (4)$$

Производные в начальный момент будем предполагать равными нулю.

Тогда точка сначала двигается близко к линии $(-a < x < 0; y = 0)$, потом близко к линии $(0 < x < \varepsilon; y = 0)$, $\varepsilon < a$, далее движение становится уже непредсказуемым.

2. Построение системы разностных уравнений

Для приближенного решения системы (2)-(3) с начальным условием (4) можно составлять различные системы разностных уравнений. Отсюда следует, что алгоритм вычисления (с учетом дискретности набора машинных чисел) - представляет собой самостоятельный объект. Предлагается

Определение 1. Если алгоритм вычисления с рациональными числами, дающий по исходным данным достаточно длинную последовательность чисел $\{x_n: n=1,2,3, \dots\}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) существуют такие числа $0 < p < q$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ будет $|x_n| < q$;
- 2) для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такое $n > m$, что $|x_n| > p$;
- 3) последовательность $\{x_n: n=1,2,3, \dots\}$ не близка к периодической;
- 4) при малых изменениях исходных данных (переходе к соседним машинным числам) последовательность $\{x_n: n=1,2,3, \dots\}$ значительно изменяется (то есть имеет место вычислительная неустойчивость),

то такой алгоритм будем называть дискретным странным аттрактором.

3. Описание реальной модели

По заданному нечетному числу k ($k = 5, 7, 9$)

- 1) Вырезать из тонкого железного листа правильный $2k$ -угольник диаметром 60-100 см. Занумеруем его вершины от 1 до $2k$, а центр - 0.
- 2) Расположить многоугольник горизонтально и согнуть его так, чтобы отрезки 1-0, 3-0, 5-0, ..., $(2k-1)$ -0 имели большой наклон вниз к точке 0, а отрезки 2-0, 4-0, 6-0, ..., $(2k)$ -0 имели небольшой наклон вниз к точке 0.
- 3) Пустить стальной шарик из точки 2. Он должен покатиться к точке 0, потом подняться немного по направлению к точке $(2+k)$, потом скатиться (неопределенно) на отрезок $(2+k+1)$ -0 или на отрезок $(2+k-1)$ -0, по этому отрезку скатиться к точке 0, подняться и т.д.

4. Хаусдорфова асимптотическая эквивалентность

Пространство решений некоторой динамической системы с непрерывным временем с начальным условием φ можно представить в виде непрерывного оператора $W(t, \varphi): \mathbf{R}_+ \times \Phi \rightarrow \mathbf{Z}$, Φ - метрическое пространство начальных условий, \mathbf{Z} - метрическое пространство значений решений.

В дополнение к предложенному нами ранее понятию «асимптотическая эквивалентность» [8], мы предлагаем асимптотическую эквивалентность по траекториям.

Определение 2. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением хаусдорфовой асимптотической эквивалентности:

$(\varphi_1 \cong \varphi_2)$ определяется следующим образом: для любого (малого) $\varepsilon \in \mathbf{R}_{++}$ можно найти такое $s \in \mathbf{R}_+$ и такую строго возрастающую до бесконечности непрерывную функцию $\mathcal{G}: [s, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$, что $(\forall t \in [s, \infty)) (\rho_{\mathbf{Z}}(W(t, \varphi_1), W(\mathcal{G}(t), \varphi_2)) < \varepsilon)$.

Хаусдорфова асимптотическое фактор-пространство будем обозначать $\Phi^{*=}$.

Пример 1. Пусть $\Phi = \mathbf{Z} = \mathbf{R}^3$. Странный аттрактор Лоренца, притягивающее множество которого состоит из двух касающихся циклов.

Здесь $\Phi^{*=}$ состоит из трех элементов:

- (поскольку многократный обход в окрестности одного цикла можно заменить однократным обходом) класс эквивалентности, представляемый чередованием обхода циклов;
- класс эквивалентности, представляемый приближением к первому циклу;

- класс эквивалентности, представляемый приближением ко второму циклу.

Пример 2. Пусть $\Phi=Z=R^2$. Рассмотрим систему (2)-(3)-(4) при $k=3$. Она имеет три устойчивых и три неустойчивых направления.

Здесь Φ^* состоит из следующих элементов:

- три класса эквивалентности, представляемые периодическими движениями по устойчивому и противоположному неустойчивому направлению;
- (бесконечное количество) классов эквивалентности, представляемых чередованием по трем устойчивым направлениям.

Список использованных источников:

1. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. - Москва: Наука, 1984. - 432 с.
2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. - пер. с англ. - Москва: Мир, 1985. - 529 с.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение, пер. с англ. - Москва: Мир, 1988. - 240 с.
4. Липцев А.В. Странный аттрактор в простейшей механической системе // Компьютерные инструменты в образовании, 2010, № 6. - С. 57-66.
5. Кененбаева Г.М. Явление вычислительного расщепления в теории сингулярно-возмущенных систем // Научный журнал Министерства образования и науки «Поиск», Алматы, Казахстан. - № 4. - 2010. – С. 233-237.
6. Kenenbaeva G.M., Tagaeva S. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014). – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 107-111.
7. Панков П.С., Тагаева С.Б. Компьютерное и реальное моделирование явления странного аттрактора системой дифференциальных уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 17-23.
8. Панков П.С., Жэнтаева Ж.К. Асимптотическая эквивалентность решений эволюционных уравнений на полуоси // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, № 12, 2019. - С. 69-72.

* * *

УДК: 515.122

КИНЕМАТИКАЛЫК МЕЙКИНДИКТЕРДИН ӨЛЧӨМДӨРҮ ЖАНА КОМПЬЮТЕРДЕ
КӨРСӨТҮҮСҮ
КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И РАЗМЕРНОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ
ПРОСТРАНСТВ
COMPUTER PRESENTATION AND DIMENSIONS OF KINEMATICAL SPACES

*P.S. Pankov, Institute of Mathematics
720071 Bishkek, Kyrgyzstan E-mail: pps5050@mail.ru
A.H. Zhoraev docent of Department of Mechanics and Mathematics
Kyrgyz-Uzbek University
79 Isanov Str. 714017 Osh, Kyrgyzstan
E-mail: zhvl967@mail.ru*

Аннотация: Компьютер аркылуу жүзөгө ашырылуучу, эвклиддик эмес топологиялык мейкиндиктерде башкарылуучу кыймылдоо бул макалада каралат. Макалада чекиттин жана узун-туурасы бар объекттин кыймылдоосун жабдуучу аныктамалар жана кинематикалык мейкиндиктерде кыймылдоонун негизинде өлчөмдүү үч аныктама бар.

Аннотация. В статье рассматривается управляемое движение в неевклидовых топологических пространствах, которое может быть реализовано на компьютере. Статья содержит определения, обеспечивающие движение точки и протяженных объектов, и три определения размерности, основанные на движении в кинематических пространствах.

Abstract: This paper deals with controlled motion in non-Euclidean topological spaces which can be implemented by means of computer. It contains a survey of definitions to provide motion of a point, definitions of motion of a lengthy object and three definitions of dimension based on motion in kinematical spaces.

Key words: topological space, metrical space, kinematical space, computer, Riemann surface, motion, rotation, dimension.

Урунттуу сөздөр: топологиялык мейкиндик, метрикалык мейкиндик, кинематикалык мейкиндик, компьютер, римандык бет, кыймылдоо, айлануу, өлчөм.

Ключевые слова: топологическое пространство, метрическое пространство, кинематическое пространство, компьютер, риманова поверхность, движение, вращение, размерность.

1. Introduction

Since it is known, S.Ulam [6] was the first to propose an active work on computer to present a virtual (four-dimensional Euclidean) space, but he did not propose any concrete methods of implementation.

An another way to perform non-Euclidean spaces visually by means of computer was proposed [7]. His idea can be demonstrated by the following example. If we put the figure \supseteq onto a common

ring band and we can look "along" the band sufficiently far then we will see the sequence of diminishing figures $\supset\supset\supset\supset\dots$

If we do same for a Mobius band then we will see the sequence of diminishing figures

$\supset\subset\supset\subset\dots$

We [4] proposed to use controlled (interactive) motion in non-Euclidean topological spaces by means of computer. We implemented the Mobius band as follows. We are standing on a band and see the figure \supset (the horizon is less than half of the length of the band). We go and soon we see the figure \subset .

We [1] introduced general conception of a kinematical space and implemented some kinematical spaces (Riemann surfaces, Mobius band, projective plane, topological torus) with search in them. Methods of constructing such spaces and marking to facilitate motion in them were proposed in [2] and applied in [5].

A similar definition, independently of us, was proposed in [3]. We do not know whether it was implemented by computer.

Kinematical investigation of unknown spaces defined by differential and algebraic equations was proposed in [8].

New types of dimensions based on motion were announced in [9] and [10].

In this paper we expound this approach and give definitions of three new types of dimensions: successful observation and "almost observation" from observable domains; possibility of rotation of lengthy sets.

2. Review of preceding definitions on motion and dimensions

We will use denotations $R := (-\infty, \infty)$; $R_+ := [0, \infty)$; $Q^k := [0; 1]^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ is a k -dimensional cube (segment, square, cube, ...); ε is a small positive parameter. Also, we will extend functions to sets with same denotations.

Natural motion of points (also implemented on computer) is presented by the following system of axioms [2] based on the notion of *time*.

Definition 1. A computer program is said to be a **presentation** of a computer kinematical space if:

P1) there is an (infinite) metrical space X of points and a set X_I of program-presentable points being sufficiently dense in X ;

P2) the user can pass from any point x_1 in X_I to any other point x_2 by a sequence of adjacent points in X_I by their will;

P3) the minimal time to reach x_2 from x_1 is (approximately) equal of the minimal time to reach x_2 from x_1 .

The space X is said to be a **kinematic space**; the space X_I is said to be a **computer kinematic space**; this minimal time is said to be the **kinematical distance** ρ_X between x_1 and x_2 ; a sequence of adjacent points is said to be a **route**. Passing to a limit as X_I tends to X we obtain the following.

There is a set K of **routes**; each route M , in turn, consists of the positive real number T_M (**time** of route) and the function $m_M: [0, T_M] \rightarrow X$ (**trajectory** of route);

(K1) For $x_1 \neq x_2 \in X$ there exists such $M \in K$ that $m_M(0) = x_1$ and $m_M(T_M) = x_2$, and the set of values of such T_M is bounded with a positive number below;

(K2=P3) If $M=\{T_M, m_M(t)\} \in K$ then the pair $\{T_M, m_M(T_M - t)\}$ is also a route of K (the reverse motion with same speed is possible);

(K3) If $M=\{T_M, m_M(t)\} \in K$ and $T^* \in (0, T_M)$ then the pair: T^* and function $m^*(t)=m_M(t)$ ($0 \leq t \leq T^*$) is also a route of K (one can stop at any desired moment);

(K4) concatenation of routes for three distinct points x_1, x_2, x_3 .

Remark 1. After our publication [2] another version of presenting "motion" based on the notion of "path" was proposed.

Denote the set of connected subsets of R as In . A *path* is a continuous map $\gamma : In \rightarrow X$ (a topological space).

Definition 2. The following definition is composed of some definitions in [3] (briefly) reduced to a "a priori" bounded, path-connected space X ; denotations are slightly unified.

A length structure in X consists of a class A of admissible paths together with a function (length) $L: A \rightarrow R_+$.

The class A has to satisfy the following assumptions:

(A1) The class A is closed under restrictions: if $\gamma \in A$, $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ and $[u, v] \subset [a, b]$ then the restriction $\gamma|_{[u, v]} \in A$ and the function L is continuous with respect to u, v ;

(A2) The class A is closed under concatenations of paths and the function L is additive correspondingly. Namely, if a path $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ is such that its restrictions γ_1, γ_2 to $[a, c]$ and $[c, b]$ belong to A , then so is γ .

(A3) The class A is closed under (at least) linear reparameterizations and the function L is invariant correspondingly: for a path $\gamma \in A$, $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ and a homeomorphism $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ of the form $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, the composition $\gamma(\varphi(t))$ is also a path.

(A4) (similar to (K1)).

The metric in X is defined as

$$\rho_L(z_0, z_1) := \inf \{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow X; \gamma \in A; \gamma(a) = z_0; \gamma(b) = z_1\}.$$

We mention some known definitions briefly (we restrict with metric sets):

Definition 3. Dim-dimension (or "cover"- or Lévesque one): it is defined to be the minimum value of n , such that every open cover (set of open sets) C of X has an open refinement with number of overlapping being $(n + 1)$ or below.

Ind-dimension: by induction $Ind(\emptyset) = -1$; $Ind(X)$ is the smallest n such that, for every closed subset F of every open subset U of X , there is an open set V in "between F and U " such that $Ind(Boundary(U)) < (n - 1)$.

Minkovski (Min)-dimension. $Min(X) := \lim\{ (-\log N_\varepsilon / \log \varepsilon) \mid \varepsilon \rightarrow 0 \}$ where N_ε is the minimal cardinality of ε -sets in X . If \lim does not exist then $\liminf (Min_-)$ and $\limsup (Min_+)$ to be considered.

Remark 3. For metrical spaces *Dim-dimension* and *Ind-dimension* coincide. Obviously, $Min(Q^k) = k$.

3. Motion of lengthy objects in kinematical spaces

Definition 1 is not sufficient for motion of point sets. One of possible extensions of Definition 1 is the demand of isometric of all shifts of a set during motion but it is too binding. We proposed [11]

Definition 4. Given a set $S \subset K$. A set of routes with functions $\{M(p) : p \subset S\}$ with a same time T is said to be a motion of S with bounded deformation if there are such constants $0 < a_- < 1 < a_+$ that

(M1) $(\forall p \in S)(M(p)(0) = p)$;

(M2) $(\forall p_1 \neq p_2 \in S)(\forall t \in [0, T])(\rho_K(M(p_1)(t), M(p_2)(t)) \in [a_-, a_+]\rho_K(p_1, p_2))$.

Definition 5. If additionally

(R1) there exists such set ("axis") $C \in S$ that $M|_C$ is the identity operator;

(R2) $(\forall p \in S)\{M(S)(0) = M(S)(T)\}$ (initial and final sets coincide);

(R3) $(\forall t_1 \neq t_2 \in (0, T))(M(S)(t_1) \cap M(S)(t_2) = C)$ (the set S is "thin" and does not pass by itself excluding the axis);

then such motion is said to be a "proper rotation" (with "bounded deformation" correspondingly) around C .

Remark 4. To define "rotation" of a general (spacious) objects in a space without geometry is very complicated. For our purposes such "proper rotation" is sufficient.

4. Dimensions defined by motion in kinematical spaces

Definition 6. A set B of a kinematical space X is said to be "fully observable" if there exists a route including all this set.

Definition 7. A kinematical space X is said to be "locally observable" if each its point has a "fully observable" neighborhood.

Definition 8. A locally observable kinematical space X is said to be "observable" if each its bounded set is "fully observable".

As usually, we will call a bijective continuous image of a segment $[0, T]$ a "segment in kinematical space". Also, we will call the trace of bijective motion of a segment with one of endpoints fixed "triangle" etc.

Definition 9. "Orientation dimension" $O ri$ - is 1 for observable spaces. If there exists such "segment" with endpoints z_1 and z_2 and an inner point z_0 and such rotation with bounded deformation around z_0 that z_1 passes to z_2 and vice versa then $O ri(K) > 2$; if there exists a "triangle" with vertices z_1, z_2 and z_3 and a point z_0 within the "segment" $z_1 - z_2$ which can be rotated around the segment $z_0 - z_3$ with bounded deformation such that z_1 passes to z_2 and vice versa then $O ri(K) > 3$ etc.

Obviously, $O ri(Q^k) = Dim(Q^k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Remark 5. "Motion" of such lengthy sets into themselves is not sufficient for such definition because a triangle $z_1 - z_2 - z_3$ can be transformed continuously into triangle $z_2 - z_1 - z_3$ by motion along the Mobius band but its dimension is 2.

The next definition also begins with observable spaces.

Definition 10. (For bounded spaces only). Kinematical (Kin -) dimension is 1 for observable spaces. By induction: If $not(Kin(X) \leq n)$, $n \geq 1$ and there exists function $M_n(a_1, a_2, \dots, a_n, t): R_+^n \times R_+ \rightarrow X$ defined for $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, being a route for fixed a_1, a_2, \dots, a_n , such that

- 1) $M_n(a_1, a_2, \dots, a_n, 0) = x_0$ (a fixed element in K);
- 2) $M_n(a_1, a_2, \dots, a_n, t)$ does not depend on a_i being greater than t ;
- 3) $\rho_K(M_n(a_1', a_2', \dots, a_n', t), M_n(a_1'', a_2'', \dots, a_n'', t)) \leq |a_1' - a_1''| + |a_2' - a_2''| + \dots + |a_n' - a_n''|$;
- 4) Trajectories of $M_n(a_1, a_2, \dots, a_n, t)$ for all a_i cover the set X

then $Kin(X) = n + 1$.

It is obvious that $Kin(Q^1) = 1$.

Remark 6. There exists a continuous Peano surjection $Q^1 \rightarrow Q^2$ if Q^2 is considered as a topological space.

Theorem 1. $Kin(Q^2) = 2 (= Dim(Q^2))$ if Q^2 is considered as a kinematical space with Euclidean metric.

Proof. By contradiction. If $Kin(Q^2) = 1$ then there exists a trajectory S covering all Q^2 . Choose a natural n and divide Q^2 into $n \times n$ little squares. The trajectory S passes through all centers of squares and has the length within each square not less than $1/n$. Hence, its total length is not less than $n \cdot n \cdot 1/n = n$ and tends to infinity as $n \rightarrow \infty$.

Definition 11. A bounded kinematical space X is said to be "almost observable" if

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in K)(\forall x \in X)(\exists t \in [0, T_M])(\rho_X(x, m_M(t)) < \varepsilon).$$

Denote the lower bound of such T_M for fixed ε as $W_\varepsilon(X)$.

Remark 7. The notion of a compact space can be expressed by "almost observability": if a kinematical space is almost observable and complete then it is compact.

As $N_\varepsilon \approx W_\varepsilon(X)/\varepsilon$ we obtain "Minkovski-kinematical" *Min-kin*-dimension:

Definition 12. $Min-kin(X) := 1 - \lim\{ \log W_\varepsilon(X)/\log \varepsilon \mid \varepsilon \rightarrow 0 \}$. If this *lim* does not exist then \liminf ($Min-kin_-$) and \limsup ($Min-kin_+$) to be considered.

$$\text{For example, } W_\varepsilon(Q^1) = 1 - 2\varepsilon;$$

$$Min-kin(Q^1) = 1 - \lim\{ \log(1 - 2\varepsilon)/\log \varepsilon \mid \varepsilon \rightarrow 0 \} = 1 - 0 = 1;$$

$$W_\varepsilon(Q^2) \approx (1 - 2\varepsilon)/(2\varepsilon) + (1 - 2\varepsilon); Min-kin(Q^2) = 1 + \lim\{ \log(2\varepsilon)/\log \varepsilon \mid \varepsilon \rightarrow 0 \} = 1 + 1 = 2.$$

5. Conclusion

The paper demonstrates that various new definitions of "dimension" conforming with known ones can be introduced on the base of "motion" and "rotation" in kinematical spaces.

References:

1. Борубаев А.А., Панков П.С. Компьютерные представления кинематических топологических пространств. – Бишкек: КГНУ, 1999.
2. Borubaev A.A., Pankov P.S., Chekeev A.A. Spaces Uniformed by Coverings.- Budapest: Hungarian-Kyrgyz Friendship Society, 2003.
3. Burago D., Burago Yu., Ivanov S.A Course in Metric Geometry // Graduate Studies in Mathematics, Volume 33, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2001.
4. Pankov P.S., Bayachorova B.J. Using computers to perform non-Euclidean topological spaces // The 6-th conference and exhibition on computer graphics and visualization "Graphicon-96", Saint-Petersburg, 1996, vol. 2, p. 232.
5. Pankov P.S., Joraev A.H. Recognizability and local computer presentation of topological spaces // Problems of modern topology and applications: abstracts of the international conference. - Tashkent: Nizami Tashkent State Pedagogical University, 2013. - Pp. 70-72.
6. Ulam S.M. A Collection of Mathematical Problems.- New York: Interscience Publishers, 1960.
7. Weeks J.R. The Shape of Space.- New York: Marcel Dekker, Inc., 1985.
8. Жораев А.Х. Исследование топологических пространств кинематическим методом. – Saarbrücken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2017. – 78 с.
9. Zhoraev A.H. Motion of sets and orientation dimension of kinematical spaces // Abstracts of the VI Congress of the Turkic World Mathematical Society.- Astana: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2017. - P. 124.

10. Zhoraev A. Orientation dimension and orientation constants of kinematical spaces //Abstracts of the Third International Scientific Conference "Actual problems of the theory of control, topology and operator equations".- Bishkek:Kyrgyz Mathematical Society, 2017. - P. 36.
11. Жораев А. Х. Индуктивное определение кинематической размерности топологических пространств // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 139-144.

* * *

УДК: 517.5:517.91

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ОБЪЕКТОВ КЛАССА БОЛГОН ОБЪЕКТОВ
КАТЕГОРИИ
КАТЕГОРИЯ ОБЪЕКТОВ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ
CATEGORY OF OBJECTS WITH FUNCTIONAL RELATIONS

Кененбаева Г.М., КНУ им. Ж. Баласагына, gylaim@mail.ru
Кененбаев Э., ИМ НАН КР

Аннотация: Бул макалада өз арафункционалдык байланыштары бар объектилердин категориясынын аныктамасы киргизилген. Бул категориядагы объектилер – аларда аныкталган көп орундуу предикаттардын көптүгү, морфизмдер – көптүктөрдү предикаттардын чындыгын сактаган, өзгөртүүлөр. Негизги шарты: көптүктөрдү, предикат чын болуп тургандай, бир элемент менен толуктоо мүмкүнчүлүгү. Төмөнкү классификация сунушталат: кошумча элементчектүү же чексиз көптүктөн же жалгыз болуш мүмкүн. Мисалдар келтирилген. Мындай өз арафункционалдык байланыштардыкээ бир дифференциалдык теңдемелерди изилдөө үчүн колдонуу көрсөтүлгөн.

Аннотация: В статье вводится определение категории объектов с функциональными соотношениями. Объектами в этой категории являются множества с определенными на них многоместными предикатами, морфизмами - такие преобразования множеств, которые сохраняют истинность предикатов. Основное условие: возможность такого пополнения множеств одним элементом, что предикат становится истинным. Предлагается классификация: дополнительный элемент является единственным, из конечного или бесконечного множества. Приведены примеры. Показано использование таких соотношений для исследования некоторых дифференциальных уравнений.

Annotation: A definition of category of objects with functional relations is proposed in the paper. Objects of this category are sets as domains of multiplace predicates; morphisms are transformations of sets preserving truth of predicates. The main condition: a set can be replenished by one element in such a way that the predicate becomes truth. A certain classification of them is proposed: the additional element is unique; of finite or of infinite set. Examples are given. An application of such relations to investigate some differential equations is demonstrated.

Ачык сөздөр: дифференциалдык теңдеме, аналитикалык функция.

Ключевые слова: категория, множество, объект, морфизм, многоместный предикат, функциональное соотношение, дифференциальное уравнение, классификация, функция.

Key words: category, set, object, morphism, multiplace predicate, functional relation,

differential equation, classification, function.

Введение:

Понятие категории дает возможность единообразно излагать факты, связанные с различными разделами математики. В Кыргызстане первые работы по теории категорий были выполнены М.Я. Медведевым и А.А. Борубаевым. Нами [20-21] предложены определения категории уравнений и ее подкатегорий.

В большинстве работ по теории дифференциальных уравнений рассматривались или решения в целом (гладкие функции, аналитические функции), или значения решений в близких точках (для приближенных методов), имелись отдельные результаты, где использовались значения функций в отдаленных точках. В [14] была предложена аксиоматика для функций, у которых значения в различных точках связаны. В [22] - применение функциональных соотношений для приближенных вычислений.

В настоящей статье

- вводится аксиоматика для множеств, у которых различные элементы связаны между собой, и определяется категория таких объектов;

- проводится классификация наборов связанных между собой элементов множеств: наборы из бесконечного и конечного количества значений; полностью определенные наборы и частично определенные наборы, а также соответствующая классификация дифференциальных уравнений и описание возможности применения функциональных соотношений для решения.

1. Определение категории объектов с функциональными соотношениями

Определение 1. Вводится категория Rel-Set. Ее объектами являются множества M определенными на них n -местными симметрическими предикатами P (и, возможно, дополнительными $(n-1)$ -местными симметрическими предикатами Q при $n > 2$), $n \geq 2$.

Выполняются следующие условия:

Если два из $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ равны между собой, то $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{«ложь»}$;

Для любых (или таких, что « $Q(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ ») различных между собой $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in M$ существует такое $x_n \in M$, что $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{«истина»}$.

Морфизмами являются такие взаимно-однозначные преобразования множеств M , что предикат P сохраняет свое значение.

В том случае, когда такое $x_n \in M$ единственно, будем обозначать подкатеорию, как Rel-Set-1.

В том случае, когда такое $x_n \in M$ выбирается из конечного множества, будем обозначать подкатеорию, как Rel-Set-f.

В том случае, когда такое $x_n \in M$ выбирается из бесконечного множества, будем обозначать подкатеорию, как Rel-Set-i.

Функции $f: X \rightarrow Y$ можно рассматривать, как множества пар $\{x=(u, f(u)): u \in X\}$. Тогда Определение 1 переходит и на функции.

Соответственно, определяются подкатегории Rel-Func-1, Rel-Func-f и Rel-Func-i.

2. Примеры объектов с замыкающим элементом из бесконечного множества

Пример 1. Rel-Set-i. Объекты - $(n-2)$ -мерные гиперплоскости в пространстве R^{n-1} . $P(x_1, \dots, x_n) = \text{«точки } x_1, \dots, x_n \text{ лежат на одной } (n-1)\text{-мерной гиперплоскости»}$.

В частности, при $n=4$: «данные четыре различных точки из R^3 лежат на одной плоскости».

Морфизмы - линейные невырожденные преобразования пространства.

Пример 2. Rel-Func-i. Объекты - графики многочленов $(n-2)$ -степени на плоскости R^2 .

Обозначим $x_i = (u_i, v_i)$.

$Q(x_1, \dots, x_{n-1}) =$ «абсциссы u_i всех точек различные»;

$P(x_1, \dots, x_n) =$ «существует такой многочлен $W(u)$ $(n-2)$ -степени, что $v_i = W(u_i)$, $i = 1, \dots, n$ ».

Этот предикат можно выписать в явном виде с помощью многочлена Лагранжа.

В частности, при $n=3$:

$P(x_1, x_2, x_3) =$ «данные три точки из R^2 - различные и лежат на одной прямой».

Морфизмы - линейные преобразования отдельно по оси абсцисс и отдельно по оси ординат.

Пример 3. Rel-Set-i. Объекты - окружности на плоскости R^2 , $n=4$.

$Q(x_1, x_2, x_3) =$ «точки не лежат на одной прямой»;

$P(x_1, x_2, x_3, x_4) =$ «точки лежат на одной окружности».

Этот предикат можно выписать в явном виде, через равенство вписанных углов.

Морфизмы - повороты и сдвиги плоскости.

Пример 4. Rel-Set-i. Объекты - сферы в пространстве R^3 , $n=5$.

$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) =$ «точки не лежат в одной плоскости»;

$P(x_1, x_2, x_3, x_4) =$ «точки лежат на одной сфере».

Морфизмы - повороты и сдвиги пространства.

3. Примеры объектов с замыкающим элементом из конечного множества

Пример 5. Rel-Func-f. См. Пример 2. Дополнительное условие: «точки можно перенумеровать так, что расстояния между абсциссами равны». Тогда еще одну точку можно добавить двумя способами.

Пример 6. Rel-Func-1. Положим $M = R^3 = R^2 \times R$, $n=4$; $u_i \in R^2$, $v_i \in R$.

$Q(x_1, x_2, x_3) =$ «точки u_1, u_2, u_3 образуют прямоугольный треугольник»;

$P(x_1, x_2, x_3, x_4) =$ «точки u_1, u_2, u_3, u_4 образуют прямоугольники суммы значений v_1, v_2, v_3, v_4 на противоположных концах диагоналей равны».

Этот пример основан на том, что функция двух скалярных переменных - сумма функций от одной переменной каждая - удовлетворяет тождеству А с гейрссона для четырех точек:

Если $f(p, q) \equiv f_1(p) + f_2(q)$, p_1, p_2, q_1, q_2 - любые числа, то

$$f(p_1, q_1) + f(p_2, q_2) \equiv f(p_1, q_2) + f(p_2, q_1).$$

Морфизмами здесь являются: сдвиги и повороты плоскости R^2 и линейные преобразования прямой R . Соответственно, последнее равенство меняет свой вид.

Следующие примеры аналогичны, поэтому выпишем только соответствующие предикаты.

Пример 7. Функция m скалярных переменных - сумма функций от одной переменной каждая - удовлетворяет аналогичному тождеству А с гейрссона для четырех точек, которые образуют прямоугольник, какие-либо две противоположные стороны которого параллельны одной из осей координат.

Пример 8. Известно, что функция m скалярных переменных - сумма функций от меньшего числа переменных каждая -

$$f(u_1, \dots, u_m) = g_1(u_2, \dots, u_m) + \dots + g_q(u_1, \dots, u_{q-1}, u_{q+1}, \dots, u_m) + \dots + g_m(u_1, \dots, u_{m-1}),$$

удовлетворяет обобщенному тождеству Асгейрссона для 2^m точек.

Например, для $m=3$: пусть $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ - любые числа, тогда
 $f(u_1, u_2, u_3) - f(u_1, u_2, u_6) - f(u_1, u_5, u_3) + f(u_1, u_5, u_6) -$
 $- f(u_4, u_2, u_3) + f(u_4, u_2, u_6) + f(u_4, u_5, u_3) - f(u_4, u_5, u_6) = 0.$

3. Классификации дифференциальных уравнений

Обзор литературы показывает, что единообразие в терминологии имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений и для дифференциальных уравнений в частных производных с количеством переменных не более двух и порядка не выше второго.

В работах [2], [3], [5], [6], [12], [15], [16], [17], [18], [19] и других предлагается классифицировать дифференциальные уравнения в частных производных по их записи, и рассматриваются такие преобразования, которые не меняют, хотя и упрощают вид записи. В [20], [21] предложено классифицировать уравнения по свойствам их решений, даже если они принадлежат к различным типам.

Рассмотрим примеры возникновения и применения функциональных соотношений.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пример 9. См. Пример 2 и Пример 5. Рассмотрим уравнение $y^{(k)}(x)=0$. Его решение - многочлен $(k-1)$ порядка. Его значения можно находить для любого $h>0$ последовательно по формуле:

$$y(x) = \sum_{j=1}^k C_k^j (-1)^{j+k} y(x - jh).$$

Этот пример ставит задачу о классах обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых можно последовательно находить решения аналогичными способами.

Пример 10. Связь между значениями решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения в различных точках получил С. J. de la Vallée Poussin (см. например [1]): уравнение

$$y^{(n)}(u) + p_1(u) y^{(n-1)}(u) + \dots + p_n(u) y(u) = 0, \quad a \leq u \leq b, p_k(u) \in C[a, b],$$

с условиями $y(u_i) = c_i, i=1, \dots, n$ имеет единственное решение при ограничении

$$\|p_1\|_{[a,b]}(b-a) + \|p_2\|_{[a,b]}(b-a)^2/2! + \dots + \|p_n\|_{[a,b]}(b-a)^n/n! < 1.$$

Дифференциальные уравнения в частных производных

Пример 11. См. Пример 6. Когда стороны прямоугольника параллельны осям координат, данные объекты соответствуют решениям уравнения $\frac{\partial^2 w(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = 0$.

При повороте плоскости на 45° данные объекты соответствуют решениям уравнения $\frac{\partial^2 w(u_1, u_2)}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 w(u_1, u_2)}{\partial u_2^2}$.

Таким образом, морфизмы также являются морфизмами уравнений.

3. Заключение

Примеры, приведенные в настоящей статье, показывают, что введенные категории объединяют объекты из различных разделов математики, имеющие аналогичные свойства. Также, в различных разделах теории дифференциальных уравнений доказывались и использовались отдельные функциональные соотношения, но не была проведена их

классификация, они не использовались систематически для получения новых результатов. Предлагается разработать теорию и методику применения функциональных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бессмертных Г. А. О существовании и единственности решений многоточечной задачи Валле–Пуассена для нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1970, том 6, № 2, с. 298–310.
2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. - Москва: Изд-во Академии наук СССР, 1959. - 164 с.
3. Векуа И.Н. Дифференциальное уравнение с частными производными; методы комплексного переменного. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 2. – Москва: Советская энциклопедия, 1979. – С. 311-318.
4. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – Глава III. Построение целой функции с заданными элементами, с. 212-259; Глава V. Уравнения в конечных разностях, с. 307-398.
5. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
6. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. - 1991. - Т. 27. - № 10. - С. 1734-1745.
7. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
8. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
9. Кененбаева Г. Эффект аналитичности для дифференциальных и интегральных уравнений. – Saarbrücken, Deutschland: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. – 72 с.
10. Комленко Ю.В. Характеристика. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 5. – Москва: Советская энциклопедия, 1985. – С. 753-755.
11. Курант Р., Гильберт Р. Методы математической физики, 2-е издание. – Москва-Ленинград: Гостехтеориздат, 1951. – 544 с.
12. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – Москва: Высшая школа, 1977. – 431 с. – Глава 8. Уравнения и краевые задачи. – С. 157-173.
13. Панков П.С. Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. - Фрунзе: Илим, 1978. - 179 с.
14. Панков П.С., Матиева Г.М., Сабирова Х.С. Аксиоматическая теория характеристик и ее применение к аналитическим функциям // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 37-42.
15. Рождественский Б.Л. Гиперболического типа уравнение. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 1. – Москва: Советская энциклопедия, 1977. – С. 992-993.
16. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – Москва: Наука, 1964. – 208 с. – Глава II. Классификация уравнений второго порядка. – С. 33-46.

17. Солдатов А.П. Параболического типа уравнение. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 4. – Москва: Советская энциклопедия, 1984. – С. 195.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, 4-е издание. – Москва: Наука, 1972. – 288 с. – Глава I. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка. – С. 11-22.
19. Благовещенский А. С. О характеристической задаче для ультра гиперболического уравнения. Математический сборник, 63(105):1 (1964). - С. 137–168.
20. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж.К., Маматжан уулу Э. Элементы категории уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 88-95.
21. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. Элементы категории корректных уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2019, № 1. - С. 69-74.
22. Kenenbaev E. Functional relations for ordinary and partial differential equations // Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR, 2020, No. 1.- pp. 71-75.

* * *

УДК: 514.75

E_4 МЕЙКИНДИГИНДЕГИ ЭКИ ЧЕНЕМДҮҮ Δ_2 БӨЛҮШТҮРҮҮСҮНӨ
БИРИКТИРИЛГЕН ИЙРИ ЖӨНҮНДӨ
О ПРИСОЕДИНЕННОЙ КРИВОЙ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Δ_2 В
ПРОСТРАНСТВЕ E_4
ABOUT JOINT CURVE OF 2-DIMENSIONAL DISTRIBUTION Δ_2 IN THE SPACE E_4

Паниева Т.М., Мустапакулова Ч.А.
ОШМУ

Аннотация: Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы присоединённая к двумерному распределению Δ_2 в пространстве E_4 являлась эллипсом в случае, когда распределения Δ_2 и ему ортогонально дополнительное распределение $\bar{\Delta}_2$ – минимальные.

Аннотация: E_4 мейкиндигинде берилген эки ченемдүү Δ_2 бөлүштүрүүсү жана анын ортогоналдык толуктоочусу $\bar{\Delta}_2$ минималдык болгон учурда Δ_2 бөлүштүрүүсүнө бириктирилген ийринин эллипс болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары табылган.

Abstract: Necessary and sufficient conditions in order that the joint curve of 2-dimensional distribution Δ_2 is ellipse in the case when the Δ_2 and the orthogonal – complementary distribution $\bar{\Delta}_2$ are minimal.

Ключевые слова: распределение, минимальное распределение, евклидово пространство, присоединённая кривая.

Ачык сөздөр: бөлүштүрүү, евклидик мейкиндик, бөлүштүрүүгө бириктирилген ийри, минималдык бөлүштүрүү.

Key words: Euclidean space, distribution, minimal distribution, joint curve.

Пусть 4-мерное евклидово пространство E_4 отнесено к подвижному реперу $\mathfrak{R} = (x, \vec{e}_A), (A, B, C = 1, \dots, 4)$. Девриационные формулы репера \mathfrak{R} имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B. \quad (1)$$

Формы ω^A, ω_A^B удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики:

$$dg_{AB} = g_{AK} \omega_B^K + g_{KB} \omega_A^K,$$

где $g_{AB} = \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B$ – ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_4 и структурным уравнениям:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad D\omega_A^B = \omega_A^K \wedge \omega_K^B.$$

Контравариантные компоненты g^{BK} метрического тензора g_{AB} определяются из соотношения

$$g_{AB} g^{BK} = \delta_A^K \quad (2)$$

где δ_A^K – символ Кронекера.

Рассмотрим в области Ω пространства E_4 распределение Δ_2 и ортогонально дополнительное к нему распределение $\bar{\Delta}_2$. Векторы \vec{e}_1, \vec{e}_2 репера \mathfrak{R} расположим в плоскости $\Delta_2(x)$, а векторы \vec{e}_3, \vec{e}_4 в плоскости $\bar{\Delta}_2(x)$, где $x \in \Omega$. При этом дифференциальные уравнения Δ_2 будут:

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iA}^\alpha \omega^A, \quad (i, j, k = 1, 2; \alpha, \beta, \gamma = 3, 4), \quad (3)$$

а так как $\vec{e}_\alpha \in \bar{\Delta}_2(x)$, то

$$\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha A}^i \omega^A. \quad (4)$$

В нашем репере $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$, следовательно

$$g_{i\alpha} \cdot g_{\alpha i} = 0. \quad (5)$$

В силу равенств (5) из соотношений (2) получим:

$$g^{i\alpha} = g^{\alpha i} = 0,$$

и, следовательно

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k, \quad g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma. \quad (6)$$

Из соотношений (6) получаем:

$$dg^{ij} = -(g^{ik} \omega_k^j + g^{kj} \omega_k^i), \quad (7)$$

$$dg^{\alpha\beta} = -(g^{\alpha\gamma} \omega_\gamma^\beta + g^{\gamma\beta} \omega_\gamma^\alpha). \quad (8)$$

Дифференцируя тождества $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$ имеем:

$$\omega_\alpha^i = -g^{ik} \omega_k^\beta g_{\beta\alpha}, \quad \omega_i^\alpha = -g_{ij} \omega_j^\beta g^{\beta\alpha}. \quad (9)$$

Система величин $\{A_{ij}^\alpha, A_{i\beta}^\alpha\}$ образует геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_2 [1]. При этом компоненты $A_{ij}^\alpha, A_{i\beta}^\alpha$ образуют тензоры в отдельности. Тензор A_{ij}^α в общем случае не симметричен по индексам i, j . Величины

$$H_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}(A_{ij}^\alpha - A_{ji}^\alpha)$$

образуют тензор.

Векторы

$$\vec{M}_2 = \frac{1}{2} g^{ij} A_{(ij)}^\alpha \vec{e}_\alpha; \quad (10)$$

$$\overline{\vec{M}}_2 = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} A_{(\alpha\beta)}^i \vec{e}_i. \quad (11)$$

называются векторами средних кривизн распределений Δ_2 и $\overline{\Delta}_2$ соответственно (рисунок 1).

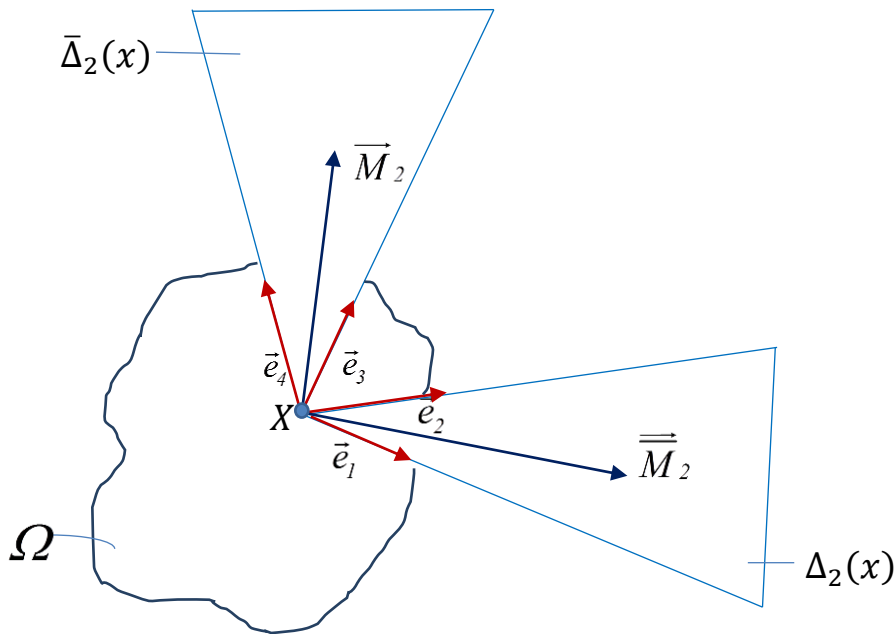


Рисунок 1.

Если вектор средней кривизны распределения равен нулю, то распределение называется минимальным [2].

Рассмотрим случай, когда распределение Δ_2 и $\overline{\Delta}_2$ – минимальны одновременно. Будем считать, что репер \mathfrak{R} пространства E_4 ортонормированным. Интегральные линии ω^A векторных полей \vec{e}_A образуют ортогональную сеть Σ_4 в пространстве E_4 . Так как сеть Σ_4 ортогональная, то имеем

$$a_{AK}^B = -a_{BK}^A \quad (A, B, K = 1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

В силу (12) условия минимальности распределений $\Delta_2, \bar{\Delta}_2$ примут вид:

$$a_{11}^3 + a_{22}^3 = 0, \quad a_{11}^4 + a_{22}^4 = 0, \quad (13)$$

$$a_{33}^1 + a_{44}^1 = 0, \quad a_{33}^2 + a_{44}^2 = 0, \quad (14)$$

соответственно. Уравнение присоединенной (фокусной) кривой распределения Δ_2 имеет вид[3]:

$$\begin{aligned} & (a_{11}^3 a_{22}^3 - a_{12}^3 a_{21}^3)(y^3)^2 + (a_{11}^4 a_{22}^4 - a_{12}^4 a_{21}^4)(y^4)^2 + \\ & + (a_{11}^4 a_{22}^3 + a_{11}^3 a_{22}^4 - a_{12}^3 a_{21}^4 - a_{21}^3 a_{12}^4) y^3 y^4 - (a_{11}^3 + a_{22}^3) y^3 - \\ & - (a_{11}^4 + a_{22}^4) y^4 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение присоединенной (фокусной) кривой распределения $\bar{\Delta}_2$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & (a_{33}^1 a_{44}^1 - a_{34}^1 a_{43}^1)(y^1)^2 + (a_{33}^2 a_{44}^2 - a_{34}^2 a_{43}^2)(y^2)^2 + \\ & + (a_{33}^1 a_{44}^2 + a_{33}^2 a_{44}^1 - a_{34}^1 a_{43}^2 - a_{34}^2 a_{43}^1) y^1 y^2 - (a_{33}^2 + a_{44}^2) y^2 + 1 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая(13) уравнение (15) напомним в виде

$$\begin{aligned} & \left((a_{11}^3)^2 - a_{12}^3 a_{21}^3 \right) (y^3)^2 + \left[(a_{11}^4)^2 - a_{12}^4 a_{21}^4 \right] (y^4)^2 + \\ & + (a_{11}^4 a_{22}^3 + a_{11}^3 a_{22}^4 - a_{12}^3 a_{21}^4 - a_{21}^3 a_{12}^4) y^3 y^4 + 1 = 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left[a_{12}^3 a_{21}^3 + (a_{11}^3)^2 \right] (y^3)^2 + (a_{12}^3 a_{21}^4 + a_{21}^3 a_{12}^4 - \\ & - a_{11}^4 a_{22}^3 - a_{11}^3 a_{22}^4) y^3 y^4 + \left[a_{12}^4 a_{21}^4 + (a_{11}^4)^2 \right] (y^4)^2 = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$a_{12}^3 a_{21}^3 + (a_{11}^3)^2 > 0, \quad (a)$$

$$a_{12}^4 a_{21}^4 + (a_{11}^4)^2 > 0, \quad (б)$$

$$a_{12}^3 a_{21}^4 + a_{21}^3 a_{12}^4 - a_{11}^4 a_{22}^3 - a_{11}^3 a_{22}^4 = 0. \quad (в)$$

Тогда присоединенная кривая распределение Δ_2 является эллипсом.

Обратно, если уравнение (17) определяет эллипс, то следует, что выполняются условия (а), (б). (в).

Геометрический смысл условий (а), (б). (в) заключаются в следующем соответственно:

$$\vec{A}'_{12} \cdot \vec{A}'_{21} + \vec{A}'_{11}{}^2 > 0, \quad (a')$$

$$\vec{A}''_{12} \cdot \vec{A}''_{21} + \vec{A}''_{11}{}^2 > 0, \quad (б')$$

$$\vec{A}^*_{12} \cdot \vec{A}^{**}_{21} - \vec{A}'_{11} \cdot \vec{A}^*_{22} = 0, \quad (в')$$

где

$$\vec{L}'_{12} = np_{(x, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \vec{L}_{12} = a_{12}^2 \vec{e}_2 + a_{12}^3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{L}'_{21} = np_{(x, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \vec{L}_{21} = a_{21}^3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{L}^*_{21} = np_{(x, \vec{e}_3, \vec{e}_4)} \vec{L}_{21} = a_{21}^3 \vec{e}_3 + a_{21}^4 \vec{e}_4,$$

$\vec{L}^*_{21} = a_{21}^4 \vec{e}_3 + a_{21}^3 \vec{e}_4$ – вектор, симметричный вектору \vec{L}^*_{21} относительно биссектрисе угла (\vec{e}_3, \vec{e}_4) .

$$\vec{L}'_{11} = np_{(x, \vec{e}_3, \vec{e}_4)} \vec{L}_{11} = a_{11}^3 \vec{e}_3 + a_{11}^4 \vec{e}_4,$$

$$\vec{L}'_{22} = np_{(x, \vec{e}_3, \vec{e}_4)} \vec{L}_{22} = a_{22}^3 \vec{e}_3 + a_{22}^4 \vec{e}_4,$$

$\vec{L}^*_{22} = a_{22}^4 \vec{e}_3 + a_{22}^3 \vec{e}_4$ – вектор, симметричный вектору \vec{L}'_{22} , относительно биссектрисе угла (\vec{e}_3, \vec{e}_4)

$$\vec{L}_{12} = d_2 \vec{e}_1, \quad \vec{L}_{21} = d_1 \vec{e}_2, \quad \vec{L}_{11} = d_1 \vec{e}_1, \quad \vec{L}_{22} = d_2 \vec{e}_2,$$

где d_i – символ дифференцирования вдоль линии ω^i .

Из вышеизложенного следует

Теорема. Присоединенная кривая к распределению Δ_2 является эллипсом тогда и только тогда, когда выполнены условия: (а), (б), (в).

Литература:

1. Липтев Г. Ф. Распределения касательных элементов / Труды Геом. семинара, 1971, т. 3. С. 29-48.
2. Кузьмин М. К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n и их обобщения / В кн. Проблемы геометрии.–Все союз. ин-т науч. и техн. информ., том 7. – Москва, 1975. С. 215-229.
3. Матиева Г. Геометрия p - распределения в евклидовом n -пространстве: диссертация кандидата физ.-мат. наук / Г.Матиева, 1985. 105 с.

* * *

УДК: 517.955.8

АЛКАК ҮЧҮН БИСИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ДИРИХЛЕНИН МАСЕЛЕСИНИН
ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖАШАШЫ ЖАНА ЖАЛГЫЗДЫГЫСУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦАEXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE BISINGULARLY
PERTURBED DIRICHLET PROBLEM FOR A RING**Орозов М.О., ОшМУнун аспиранты,
Маматбуваева М.И., Раманкулова Ш.А., ОшМУнун магистранттары**

Аннотация: Белгилүү болгондой, ар кандай физикалык мүнөздөгү стационардык процесстер, мисалы, диффузия, термелүүлөр, жылуулук өткөрүмдүүлүк ж.б. кичине же чоң параметрлерди камтыган эллиптикалык типтеги теңдемелер менен сүрөттөлөт. Бул параметрлердин маселенин чыгарылышына тийгизген таасирин аныктоо актуалдуу маселе болуп саналат. Макалада жогорку тартиптеги туундулардын астында кичине параметр катышкан экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулу дифференциалдык теңдеме каралат. Бул теңдеменин чыгарылышы үчүн Дирихленин шарты коюлган. Теңдеменин өзгөчөлүктөрү: эң жогорку туундулардын астында кичинекей параметр катышат жана ага ылайык козголбогон теңдеме өзгөчө айланага ээ. Изилдөөнүн максаты - Дирихле маселесинин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө. Колдонулуучуусулдар: өзгөртүп түзүү, дифференциалдык барабарсыздык, кичинекей параметрусулдары. Алгачкеректүү аныктамалар келтирилген, андан соң негизги теорема далилденген. Мындан сырткары кичинекей параметр усулун колдонуп, изилденип жаткан маселенин бисингулярдык экендиги далилденген.

Аннотация: Как нам известно, стационарные процессы различной физической природы, например, диффузия, колебания, теплопроводность и др. описываются уравнениями эллиптического типа, которые содержат либо малые параметры, либо большие. Определить влияние этих параметров на решения задачи является актуальной проблемой. В статье рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, с малым параметром при старших производных. Для решение этого уравнения ставится условие Дирихле. Особенности уравнения: присутствие малого параметра при старших производных и соответствующее невозмущенное уравнение имеет особую окружность. Цель исследования – доказать существование и единственность решению задачи Дирихле. Используемые методы: преобразования, дифференциальных неравенств, малого параметра. В начале приводятся основные определения, затем доказывается основная теорема. Кроме этого с помощью метода малого параметра доказана, что исследуемая задача является би сингулярной

Annotation: As we know, stationary processes of various physical nature, for example, diffusion, oscillations, thermal conductivity, etc., are described by equations of an elliptic type that contain either small or large parameters. Determining the influence of these parameters on the solution of the problem is an urgent problem. The article deals with a linear inhomogeneous partial differential

equation of the second order of elliptic type, with a small parameter at the highest derivatives. The Dirichlet condition is set for the solution of this equation. Features of the equation: the presence of a small parameter at the highest derivatives and the corresponding unperturbed equation has a special circle. The purpose of the study is to prove the existence and uniqueness of the solution to the Dirichlet problem. Methods used: transformations, differential inequalities, small parameter. At the beginning, the main definitions are given, then the main theorem is proved. In addition, using the small parameter method, it was proved that the problem under study is bisingular.

Ачык сөздөр: Дирихле маселеси, өзгөчө айлана, эллиптикалык типтеги теңдеме, сингулярдык козголгон маселе, бисингулярдык маселе, кичине параметр.

Ключевые слова: задача Дирихле, особая окружность, уравнение эллиптического типа, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, малый параметр.

Key words: Dirichlet problem, singular circle, elliptic equation, singularly perturbed problem, bisingular problem, small parameter.

Маселенин коюлушу

Белгилүү болгондой, ар кандай физикалык мүнөздөгү стационардык процесстер, мисалы, диффузия, термелүүлөр, жылуулук өткөрүмдүүлүк ж.б., кичине же чоң параметрлерди камтыган эллиптикалык типтеги теңдемелер менен сүрөттөлөт. Бул параметрлердин маселенин чыгарылышына тийгизген таасирин аныктоо актуалдуу маселе болуп саналат [1]-[4].

Төмөнкү чек аралык маселени изилдейбиз

$$\varepsilon \Delta v(\rho, \varphi, \varepsilon) - \sqrt[n]{\rho-1} v(\rho, \varphi, \varepsilon) = F(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad (1)$$

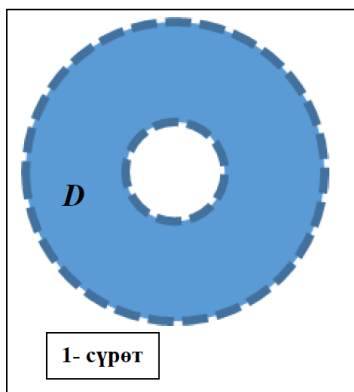
$$v(1, \varphi, \varepsilon) = \psi_1(\varphi), \quad v(a, \varphi, \varepsilon) = \psi_2(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

мында ε – кичине параметр, $D = \{(\rho, \varphi) \mid 1 < \rho < a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, $n \in \mathbb{N}$, $F \in C^\infty(\bar{D})$, $\psi_k \in C^\infty[0, 2\pi]$, $k = 1, 2$.

(1)- экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү сызыктуу, бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулу дифференциалдык теңдеме, мында $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – Лапласдын уюлдук координаталар ситстемасындагы оператору, $\sqrt[n]{\rho-1}$ – теңдеменин потенциалы, n – тамырдын көрсөткүчү.

(2)- Дирихленин чектик шарттары.

Дирихленин маселеси: D алкакта (1- сүрөт) (1)- теңдемени канааттандырып, $\rho = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ жана $\rho = a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ чектик айланаларда, тиешелүү түрдө, берилген $\psi_1(\varphi)$ жана $\psi_2(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ функцияларга барабар боло тургандай $v(\rho, \varphi, \varepsilon)$ белгисиз функцияны табуу.



Негизги жыйынтык

1-теорема. Дирихленин (1), (2) маселесинин чыгарылышы жашайт жана жалгыз.

Далилдөө. Ыңгайлуу болушу үчүн (2)- бир тектүү эмес чек аралык шарттарды бир тектүүгө алып келебиз. Ал үчүн төмөнкү өзгөртүп түзүүнү аткарабыз

$$v(\rho, \varphi, \varepsilon) = u(\rho, \varphi, \varepsilon) + \frac{\psi_2(\varphi)(\rho-1) + \psi_1(\varphi)(a-\rho)}{a-1},$$

анда (1), (2) маселе төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varepsilon \Delta u(\rho, \varphi, \varepsilon) - \sqrt[\rho]{\rho-1} u(\rho, \varphi, \varepsilon) = f(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad (3)$$

$$u(1, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad u(a, \varphi, \varepsilon) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (4)$$

мында

$$f(\rho, \varphi, \varepsilon) = F(\rho, \varphi) + \sqrt[\rho]{\rho-1} \frac{\psi_2(\varphi)(\rho-1) + \psi_1(\varphi)(a-\rho)}{a-1} - \frac{\varepsilon(\psi_2(\varphi) - \psi_1(\varphi))}{\rho(a-1)} - \frac{\varepsilon(\psi_2''(\varphi)(\rho-1) + \psi_1''(\varphi)(a-\rho))}{\rho^2(a-1)}.$$

Эгерде (3), (4) маселе жалгыз чыгарылышка ээ болсо, анда (1), (2) маселенин чыгарылышы да жашайт жана ал жалгыз болот.

(3), (4) маселенин жалгыз гана чыгарылышынын жашашын дифференциалдык барабарсыздыктар усулу менен далилдейбиз, [5]-[6]. Керектүү аныктамаларды эске салып алабыз.

1- аныктама. Эгерде $u^T(\rho, \varphi, \varepsilon)$ жана $u^J(\rho, \varphi, \varepsilon)$ функциялары төмөнкү (5) жана (6) барабарсыздыктарды канааттандырышса, анда бул функциялар тиешелүү түрдө *төмөнкү* жана *жогорку* чыгарылыштары деп аталат

$$Lu^T(\rho, \varphi, \varepsilon) \geq 0, \quad Lu^J(\rho, \varphi, \varepsilon) \leq 0, \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad (5)$$

$$u^T(1, \varphi, \varepsilon) \leq 0 \leq u^J(1, \varphi, \varepsilon), \quad u^T(a, \varphi, \varepsilon) \leq 0 \leq u^J(a, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (6)$$

мында L оператору: $Lu \equiv \varepsilon \Delta u(\rho, \varphi, \varepsilon) - \sqrt[\rho]{\rho-1} u(\rho, \varphi, \varepsilon) - f(\rho, \varphi, \varepsilon)$.

Бизге [5]-[6] жумуштан белгилүү болгондой, эгерде төмөнкү (7) барабарсыздыкты канааттандырган $u^T(\rho, \varphi, \varepsilon)$ төмөнкү жана $u^J(\rho, \varphi, \varepsilon)$ жогорку чыгарылыштар жашаса,

$$u^T(\rho, \varphi, \varepsilon) \leq u^J(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in \bar{D}, \quad (7)$$

анда (3), (4) маселенин $u(\rho, \varphi, \varepsilon)$ чыгарылышы жашайт жана ал чыгарылыш төмөнкү барабарсыздыктарды канааттандырат:

$$u^T(\rho, \varphi, \varepsilon) \leq u(\rho, \varphi, \varepsilon) \leq u^{\mathcal{K}}(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (\rho, \varphi) \in \bar{D}. \quad (8)$$

Ошондуктан, алгач төмөнкү $u^T(\rho, \varphi, \varepsilon)$ жана жогорку $u^{\mathcal{K}}(\rho, \varphi, \varepsilon)$ чыгарылыштарды тургузабыз.

Мейли $u^T(\rho, \varphi, \varepsilon) = -\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - \rho^2)$, $u^{\mathcal{K}}(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - \rho^2)$ болсун, мында

$$M = \max_{\bar{D}} \left| \frac{2\varepsilon f(\rho, \varphi, \varepsilon)}{4\varepsilon + (2a^2 - \rho^2)\sqrt[n]{\rho-1}} \right|, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Анда $(\rho, \varphi) \in D$, $0 < \varepsilon \ll 1$ болгондо төмөнкү барабарсыздыктарды алабыз:

$$\begin{aligned} Lu^T &\equiv \varepsilon \Delta u^T(\rho, \varphi, \varepsilon) - \sqrt[n]{\rho-1} u^T(\rho, \varphi, \varepsilon) - f(\rho, \varphi, \varepsilon) = \\ &= \varepsilon \left(\frac{M}{\varepsilon} + \frac{M}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt[n]{\rho-1} (2a^2 - \rho^2) M - f(\rho, \varphi, \varepsilon) = \\ &= \left(4\varepsilon + (2a^2 - \rho^2) \sqrt[n]{\rho-1} \right) \frac{M}{2\varepsilon} - f(\rho, \varphi, \varepsilon) = \\ &= \frac{(4\varepsilon + (2a^2 - \rho^2) \sqrt[n]{\rho-1})}{2\varepsilon} \left(M - \frac{2\varepsilon f(\rho, \varphi, \varepsilon)}{4\varepsilon + (2a^2 - \rho^2) \sqrt[n]{\rho-1}} \right) \geq 0 \quad \Rightarrow Lu^T \geq 0, \quad (\rho, \varphi) \in D; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Lu^{\mathcal{K}} &\equiv \varepsilon \Delta u^{\mathcal{K}}(\rho, \varphi, \varepsilon) - \sqrt[n]{\rho-1} u^{\mathcal{K}}(\rho, \varphi, \varepsilon) - f(\rho, \varphi, \varepsilon) = \\ &= -\varepsilon \left(\frac{M}{\varepsilon} + \frac{M}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt[n]{\rho-1} (2a^2 - \rho^2) M - f(\rho, \varphi, \varepsilon) = \\ &= -\left(4\varepsilon + (2a^2 - \rho^2) \sqrt[n]{\rho-1} \right) \frac{M}{2\varepsilon} - f(\rho, \varphi, \varepsilon) = \\ &= -\frac{(4\varepsilon + (2a^2 - \rho^2) \sqrt[n]{\rho-1})}{2\varepsilon} \left(M - \frac{2\varepsilon f(\rho, \varphi, \varepsilon)}{4\varepsilon + (2a^2 - \rho^2) \sqrt[n]{\rho-1}} \right) \leq 0 \Rightarrow Lu^{\mathcal{K}} \leq 0, \quad (\rho, \varphi) \in D. \end{aligned}$$

Биздин төмөнкү $u^T(\rho, \varphi, \varepsilon)$ жана жогорку $u^{\mathcal{K}}(\rho, \varphi, \varepsilon)$ чыгарылыштар үчүн (5) шарттар орун алат экен. Эми (6) шарттарды текшеребиз:

$$\begin{aligned} u^T(1, \varphi, \varepsilon) &= -\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - 1), \quad u^{\mathcal{K}}(1, \varphi, \varepsilon) = \frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - 1); \\ u^T(a, \varphi, \varepsilon) &= -\frac{M}{2\varepsilon}a^2, \quad u^{\mathcal{K}}(1, \varphi, \varepsilon) = \frac{M}{2\varepsilon}a^2; \end{aligned}$$

бул туюнтмаларды салыштырып төмөнкү барабарсыздыктарды алабыз

$$-\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - 1) \leq 0 \leq \frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - 1); \quad -\frac{M}{2\varepsilon}a^2 \leq 0 \leq \frac{M}{2\varepsilon}a^2.$$

Демек, (4) шарттар дагы аткарылат экен.

(5) барабарсыздык дагы орун алат, себеби

$$-\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - \rho^2) \leq \frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - \rho^2), \quad (\rho, \varphi) \in \bar{D}.$$

Биз тандап алган төмөнкү $u^I(\rho, \varphi, \varepsilon)$ жана жогорку $u^J(\rho, \varphi, \varepsilon)$ чыгарылыштар (5), (6) жана (7) шарттарды канааттандыргандыгы үчүн (3), (4) маселенин чыгарылышынын жашашы келип чыгат. Чыгарылыштын жалгыздыгын көрсөтүү үчүн $f(\rho, \varphi) \equiv 0$ болгондо, $u(\rho, \varphi, \varepsilon) \equiv 0$ дун келип чыгышын байкоо жетиштүү болот.

(8) барабарсыздык төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$-\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - \rho^2) \leq u(\rho, \varphi, \varepsilon) \leq \frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - \rho^2), (\rho, \varphi) \in \bar{D},$$

бул акыркы барабарсыздыктан (3), (4) маселенин чыгарылышы үчүн төмөнкү баа келип чыгат:

$$|u(\rho, \varphi, \varepsilon)| \leq \frac{M}{2\varepsilon}(2a^2 - 1), (\rho, \varphi) \in \bar{D}, 0 < \varepsilon \ll 1.$$

1-теорема далилденди.

Каралып жаткан (1), (2) Дирихленин алкак үчүн маселеси эки (кош) өзгөчөлүккө ээ:

1) ε кичине параметрдин (1)- теңдемеде жогорку туундулардын астында катышып жаткандыгы. Баарыбызга белгилүү болгондой, мындай теңдемени сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдеме деп атайбыз. Себеби, эгерде формалдуу түрдө ε кичине параметрдин маанисин нөл деп алсак, б.а. $\varepsilon=0$, анда (1)- ден төмөнкү пределдик теңдеме келип чыгат

$$-\sqrt{\rho-1}v(\rho, \varphi, 0) = F(\rho, \varphi), (\rho, \varphi) \in D$$

бул теңдеменин чыгарылышы (2)- чек аралык шартты канааттандырбайт.

2) пределдик теңдеменин чыгалышы

$$v(\rho, \varphi, 0) = -\frac{F(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}}$$

болот, жана бул функция $(\rho, \varphi) \in \bar{D}$ аймагында дифференцирленбөөчү болот.

Ушул өзгөчөлүктү тышкы асимптотикалык чыгарылышка таасирин изилдейбиз. Кичине параметр усулун колдонуп, (1)-(2) маселенин тышкы асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө изилдейбиз:

$$V(\rho, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi), \varepsilon \rightarrow 0. (9)$$

(9)- катарды (1)- теңдемеге алып барып коебуз:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (\Delta v_{k-1}(\rho, \varphi) - \sqrt{\rho-1}v_k(\rho, \varphi)) - \sqrt{\rho-1}v_0(\rho, \varphi) = F(\rho, \varphi), (\rho, \varphi) \in D.$$

Бул жерден төмөнкү катыштарды алабыз:

$$-\sqrt{\rho-1}v_0(\rho, \varphi) = f(\rho, \varphi), \quad \sqrt{\rho-1}v_k(\rho, \varphi) = \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi), \quad k \in N.$$

жана белгисиз $v_k(\rho, \varphi)$ функцияларын аныктайбыз:

$$v_0(\rho, \varphi) = -\frac{f(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}}, \quad v_k(\rho, \varphi) = \frac{\Delta v_{k-1}(\rho, \varphi)}{\sqrt{\rho-1}}, \quad k \in N.$$

Мындан $v_k(\rho, \varphi)$ функцияларын төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$u_k(\rho, \varphi) = O\left((\rho-1)^{-(5k+1)/2}\right), \quad \rho \rightarrow 1, \quad k \in N_0 = 0, 1, 2, \dots$$

Ошондуктан (9) барабардыкты төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$U(\rho, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\rho-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{(\rho-1)^5}} \right)^k F_k(\rho, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0, F_k \in C^\infty(\bar{D}), k=0, 1, 2, \dots$$

Корутунду

Демек, (1)-(2) маселенин чыгарылышы жалгыз экен. (9)-катар (1), (2) маселенин $\{(\rho, \varphi) | 1 + \varepsilon^{2/5} < \rho < a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ аймактагы гана чыгарылышы болот экен, жана бул чыгарылыш $\rho = a$ айланада $u(a, \varphi, \varepsilon) = \psi_2(\varphi)$ шарттын канааттандырбайт. Мындан сырткары $\{(\rho, \varphi) | 1 \leq \rho \leq 1 + \varepsilon^{2/5}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ аймакта (9) катар асимптотикалык мүнөзүн жоготот, б.а. асимптотикалык катар боло албайт.

Адабияттар:

1. Коул, Дж. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1972. – 276 с.
2. Levinson, N. The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = D$ for small ε // Ann. of Math. 1950. V. 51. P. 428–445.
3. Eckhaus, W. Asymptotic analysis of singular perturbations // North-Holland publishing company- Amsterdam-New-York, Oxford. - 1979. - V. 9. –287р.
4. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с
5. Andrica Dorin, M. Rassias, Differential and Integral Inequalities. Springer. 2019.
6. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Обоснование формальных асимптотических разложений решения бисингулярно возмущенных задач // Вестник ОшГУ. № 4 (4). 2015. – С. 20-27.

* * *

УДК: 625.7+622.411.5

ТЕХНОЛОГИЯЛЫК ЖОЛДОРДОГУ ЧАҢДУУЛУКТУН ЛИТОСФЕРАГА КӨРСӨТКӨН
ТААСИРИН ИЗИЛДӨӨ ЖАНА ЧАҢДЫ ТӨМӨНДӨӨТҮҮ ЖОЛДОРУ
ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЗАПЫЛЕННОСТИ НА ЛИТОСФЕРУ И СНИЖЕНИЕ
ПЫЛЕНИЯ НА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ДОРОГАХ
RESEARCH OF INFLUENCE OF THE DUST CONTENT ON LITOSPHERE

Воробьев А.Е. т.и.д., профессор, Россия, Москва ш. e-mail: fogel_al@mail.ru
Шамшиев О.Ш. г.-м.и.д., профессор, Кыргызстан, Кызыл Кыя.;
Мадаева М.З. Чечен Республикасы, Грозный ш.

Аннотация: Литосферага чаңдын тийгизген таасирин изилдөөнүн натыйжалары келтирилип, өнөр жай жолдорундагы чаңды азайтуу чаралары көрсөтүлдү. Түндүк Кавказдын карьерлериндеги чаңдын булганышынын маанилеринин катыштары бааланат.

Чаңдын курамынын литосферага тийгизген таасирин изилдөөнүн натыйжалары келтирилген жана технологиялык жолдордо чаңдын азайышы боюнча иш-чаралар көрсөтүлгөн. Түндүк Кавказдын ачык шахталарында чаңдын булганышынын маанилеринин паритеттери бааланат.

Аннотация: Представлены результаты исследования влияния запыленности на литосферу и показаны мероприятия по снижению пыления на технологических дорогах. Оценены соотношения значений пылевого загрязнения на карьерах Северного Кавказа.

Annotation: The results of a study of the effect of dust on the lithosphere are presented and measures to reduce dust on industrial roads are shown. The ratios of the values of dust pollution in the quarries of the North Caucasus are estimated.

Results of research of influence of a dust content on lithosphere are presented and actions for dust decrease on technological roads are shown. Parities of values of dust pollution on open-cast mines of the North Caucasus are estimated.

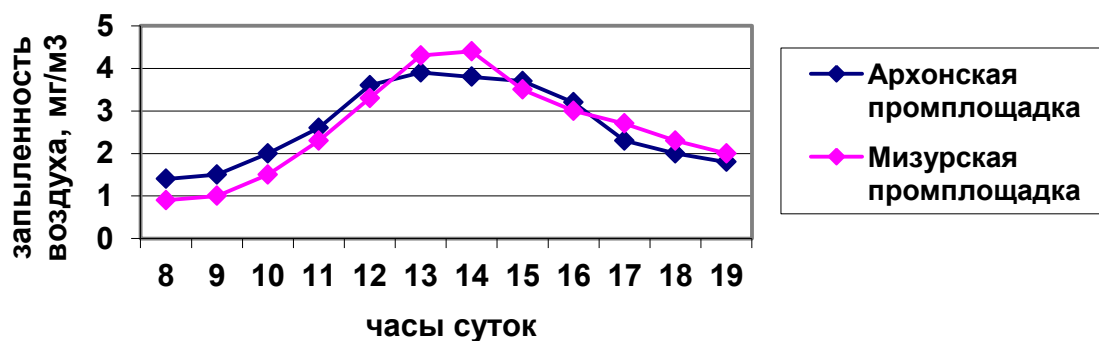
Ачкыч сөздөр: литосфера, техногендик булгануу, карьер, чаң, калдык сактоочу жай, айлана-чөйрө.

Ключевые слова: литосфера, техногенное загрязнение, карьер, запыленность, хвостохранилище, окружающая среда

Key words: lithosphere, technogenic pollution, quarry, dustiness, tailing dump, environment

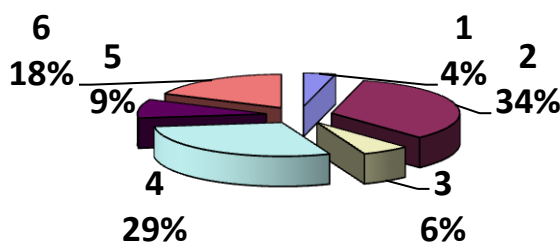
Садонский комбайнынын иш чөйрөсүндө абанын булгануусун изилдөө үчүн жер-жерлерде тала иштери жүргүзүлдү. Жердин рельефи жана метеорологиялык параметрлеринин өзгөчөлүктөрү атмосферанын сапатынын космос мейкиндигинде да, убагында өзгөрүүсүнүн пайда болушуна, ошондой эле жерде күн активдүүлүгүнүн (күндүн өнүгүшү менен) интенсивдүүлүгүнүн жогорулашына, атмосферанын чандуулук деңгээлинин өзгөрүшүнө олуттуу таасир тийгизери аныкталды.

Дем алуу зонасынын деңгээлиндеги абадагы чандын динамикасы күндүз жарык мезгилинде (1-сүрөт), ошондой эле капчыгайдагы абада вертикалдуу боюнча вертикаль боюнча белгиленди. Архонский шахтасынын No 22.



1. Күндүз жарык мезгилде атмосферанын үстүңкү катмарындагы абанын чаңдыгы

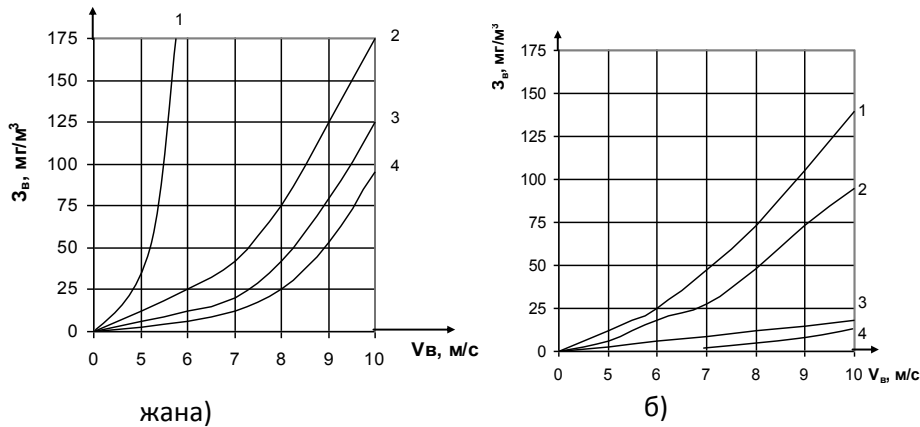
Аймактын экологиясынын калыптанышында, ошондой эле технологиялык жолдор, карьер жана таштанды жайларынын отургучтарынын жантайыңкы жана платформалары, калдык сактоочу жайлардын кургак пляждары, талус, желимдөөчү конустар жана башкалар сыяктуу чанды кетирүүчү булактар (жалпы көлөмдүн 60%) таасир этет (2-сүрөт).



2. Түндүк Кавказдын карьерлериндеги чандын булганышынын маанилеринин катышы:

1 - скважиналарды бургулоо; 2 - катуу жарылуу; 3 - тоо массасын казуу жана жүктөө; 4 - тоо массасын ташуу; 5 - тоо тектерин байытуу; 6 - беттердин чандануусу (карьердин отургучтары жана жантаймалары, таштандылар жана калдыктар ж.б.)

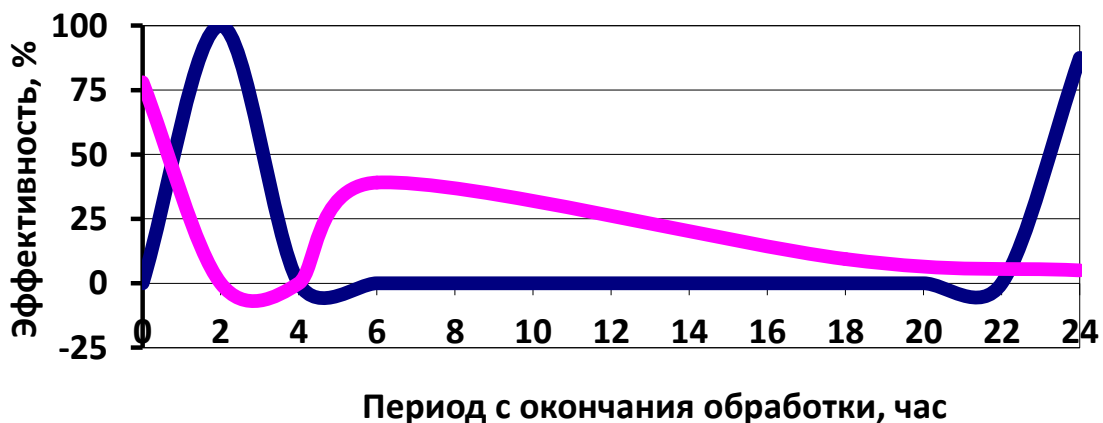
Изилдөөнүн жүрүшүндө, аба кыймылынын ар кандай ылдамдыктарындагы чаңдуу беттердеги абанын чаңынын көзкарандылыгы аныкталды (3-сүрөт).



3. V_v шамалдын ылдамдыгында уюшулбаган булактардан (чаңдуу беттерден) аба чаңынын курамындагы S_v өзгөрүүлөрдүн ийри сызыктары:

- а) баштапкы материалдан, нымдуулук $0,1 \div 0,2\%$: 1 - $f = 12 \div 14$ менен үйүлгөн руда; 2 - скарнирленген мраморлор, $f = 13 \div 15$; 3 жана 4 - роговицалар, $f = 13 \div 15$ жана $f = 18 \div 20$;
 б) чаңдын нымдуулугу ($f = 16 \div 20$ менен скарнатталган мрамор): 1 - $0-1\%$; 2 - $3-4\%$; 3 - $5-6\%$; 4 - $7-8\%$.

Жер үстүндөгү комплекстерде жана автомобиль жолдорунда абанын булганышынын булактарын жашылдандыруу үчүн чаңды жана газды нейтралдаштыруунун ар кандай технологиялары иштелип чыккан жана колдонулган (OZ-1, ОК-1m конус жана кол чатыр түрүндөгү суу-аба насостору) же сугаруучу жолдор. Бирок, каралып жаткан шарттарда, күнөстүү аба ырайында узак мөөнөттүү оң натыйжа бербейт (4-сүрөт).



4. Технологиялык (карьердик) магистралдарда чаңды басуунун натыйжалуулугу:
 1 - суу; 2 - PAA

Изилдөөгө ылайык, жолдорду шагыл таш менен жашылдандыруунун эффективдүү каражаты чаңды чылап байлап турган материалдар менен жер үстүн иштетүү болгон (1-таблица).

1-таблица

Каптамаларды биринчи иштеткенден кийин материалдарды чандан тазалоо иш-аракетинин узактыгы

Материал	Өлчөө бирдиги	1 м2 майдаланган ташка керектөө коэффициенти	Күчүнө кирүү мөөнөтү, күндөр
Техникалык кальций хлориди			
а) күйгөн	kg	0,6 ÷ 0,7	10-20
б) эритилген	kg	0,7 ÷ 1,0	10-20
Фосфат ингибирленген кальций хлориди (CРА)	kg	0.7 ÷ 0.8	15-25□
Силвинит төгүндүлөрүнүн техникалык тузу (катуу)	kg	1.2 ÷ 1.6	12-15
Техникалык лигносульфаттар (концентрациясы 50%)	l	1.4 ÷ 1.8	15-20
Лигнодор	l	1.4 ÷ 1.87	20-40
Сульфит щелоку (10% концентрация)	l	3.5 ÷ 5.0	10-15
Суюк битум жана чайыр	l	0.7 ÷ 1.07	15-45
Битумдук эмульсиялар	l	1.0 ÷ 1.3	15-45
Чийки майлар	l	0,7 ÷ 1,0	15-45

Изилдөөлөр көрсөткөндөй, эффективдүү чанды басаңдатуучу каражат (0.5□0,4)% полиакриламид (РАА).

Ушул эле суу, ЖПБнын 8 бөлүмүндө магниттик тазалоодон өткөн, ушундай эле натыйжалуулукка ээ. Ушуга байланыштуу, чанды басуу үчүн, суу түтүктөрү өнөр жай масштабында колдонулуп, ЖПБнын 8 бөлүмүндө иштетилген.

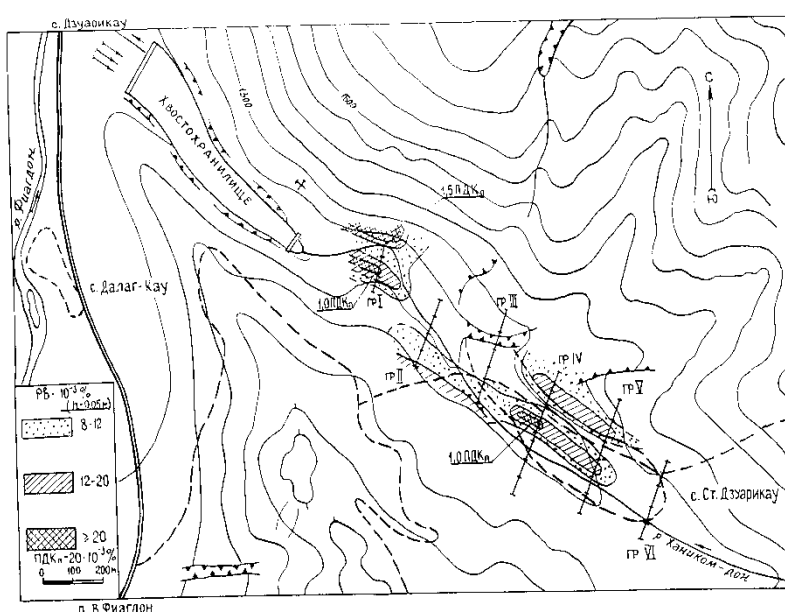
2 таблица масштабга каршы магниттик түзүлүштүн (PMU) 4-8 жуп туруктуу магниттеринде өткөндөн кийин, текшерилген суулардын беттик активдүүлүгүнүн маанилерин көрсөтөт.

стол 2

Кийин сыналган суулардын беттик чыңалуусунун мааниси
ЖПБ менен иштетүү, дин / см²

Суу булагы	ЖПБда магниттик дарылоо	Чыңалуу бети	
		иштетүүдөн мурун	Иштетилгенден кийин
Архон шахтасынан	4	74.6	46.0
	6	74.6	48.4
	8	74.6	45.3
Ардон дарыясынан	4	73.1	40.1
	6	73.1	42.4
	8	73.1	40.2
Суу өткөзгүч аркылуу	4	72.5	27.5
	6	72.5	40.4
	8	72.5	30.5

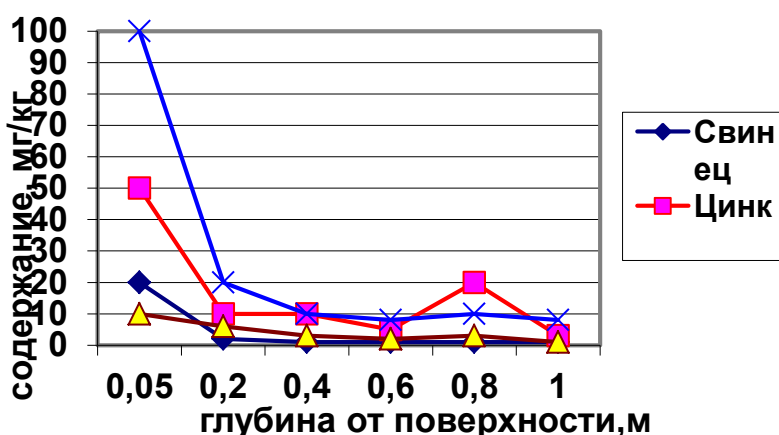
Топуракка экологиялык баа берүү үчүн, кыртыш горизонтунун микроэлементтеринин генезисин атайын изилдөөлөр жүргүзүлгөн. Коргошун менен цинктин максималдуу курамы жер кыртышынын жогорку катмарлары менен чектелип, бул топурактын бул элементтер менен техногендик келип чыгышын тастыктайт. Коргошун менен цинктин жол берилген эң жогорку концентрациясына салыштырмалуу дүң бөлүштүрүлүшү Сүрөттө көрсөтүлгөн. беш.



5. Топурактын үстүңкү катмарындагы коргошундун таралышы (Дзаурикау станциясынын аянты, Осетия)

Топурактын жогорку катмарында оор металлдардын топтолушу кыймылдуу формалардын биотага өтүшүнө, анын ичинде бир жылдык өсүмдүктөргө: картошка, капуста жана көп жылдык, алмурут жана алма.

Ошентип, негизги экологиялык түзүүчү булактар жана ПТСтин иш-аракет чөйрөсүндөгү айлана-чөйрөнүн булгануу параметрлери аныкталды (6-сүрөт).



6. Садон коргошун-цинк заводунун иштөө чөйрөсүндөгү топурактын профилиндеги цинк менен коргошундун курамындагы өзгөрүүлөр

Автомобилдердагы чанды басуу үчүн, ВТУ-38-3028-75 ылайык, чанды байлап турган Универсин агент сыналган. Универсин 50-60 тонна жүк ташуучу темир жол вагондорунда колдонууга даяр. Сууну бир аз сиңирет, ууландырбайт.

Универсинди колдонуу абанын чаңын стандарттык деңгээлге чейин 20-30 күндүн аралыгында, баштапкы тазалоо учурунда $2 \text{ л} / \text{м}^2$ жана кайталап сугаруу учурунда $0,5 \text{ л} / \text{м}^2$ чыгым менен азайтууга мүмкүндүк берди.

Руданы ташыган негизги жолдордо жер үстүндөгү жабуунун ар кандай формулалары дагы изилденген.

АБ чайыры колдонулган жолдордун башкаруу тилкелеринде жүргүзүлгөн жарым өнөр жай сыноолору көрсөткөндөй, биринчи күндөрү (биринчи 5 күндө) автоунаалардын кыймылын жүргүзүүдө чаңдын чыгышы дээрлик жок, бирок "карылыктын" каптоосу кескин жогорулайт (7-сүрөт).



7. Жолду сугаргандан кийин чаңды басуунун натыйжалуулугу:

1, 2 - баштапкы тазалоо (асфальт, шагыл таш); 3, 4 - кайра иштетүү (асфальт, шагыл)

Ошол эле жол тилкелерин чайыр менен кайра иштетүү анын эффективдүүлүгүнүн узактыгы 18-19 күнгө чейин жогорулагандыгын көрсөттү, ал эми асфальт менен жабылган жолдордо АБ чайырынын салыштырмалуу чыгымы $0,3 - 0,5 \text{ дм}^3 / \text{м}^2$, ал эми майдаланган таш менен капталгандар 0 түздү, 8 - $1,0 \text{ дм}^3 / \text{м}^2$ (3-таблица).

3-таблица

Кайра тазалоодон кийин жолдордун жанындагы абадагы чаңдын курамы

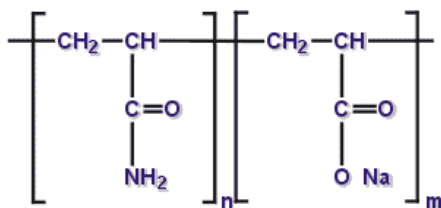
Жол жабуунун түрү		Кайталап дарылоодон кийин абадагы чаңдын курамы, мг / м3, узакка созулган дарылоо менен, күн			
Чайырдын чыгымы, дм3 / м2					
асфальт	майдаланган таш	беш	он	он беш	20
0.3-0.5		0.56	0.75	1.25	2.04
	0.8-1.0	0.60	1.0	1.50	2.05

Аниондук полиакриламид(РАА) - акриламиддин жана аниондук комономердин (негизинен, натрий акрилаттары менен акрил кислотасынын натрий туздары) эркин радикал полимеризациясы менен синтезделген ири молекулалык макромолекулалардын үй-бүлөсүнүн жалпы аталышы. Бул гидролизденген акриламид мономерлеринен жасалган синтетикалык сызыктуу полимерлер.

Молекулалар иретсиз бутактар менен чырмалышкан ийкемдүү чынжыр структуралары, алар эритмелердеги иондор менен өз ара аракеттенүүчү полиэлектролит.

Полиакриламиддин заряд тыгыздыгы (ионуулугу) жана анын молекулалык салмагы ар кандай болушу мүмкүн. Ошентип, полимер чынжырындагы зарядтын тыгыздыгы 0дөн 100% га чейин, акриламид / аниондук мономерлердин катышын өзгөртүү менен жетишилет.

Полиакриламиддин молекулалык салмагы реакциянын инициаторунун түрүнө жана концентрациясына жана реакция параметрлерине көз каранды. Атап айтканда, полиакриламиддин молекулалык салмагы (8-сүрөт) <2 миллиондон 22 миллион дальтонга чейин; аниондук заряд - 0 дөн 100% га чейин.



8. Полиакриламиддин химиялык түзүлүшү

Сунуш кылынган модель ачык, жана бул өндүрүштү өнүктүрүүнүн бардык баскычтарында айлана чөйрөнүн сапатын сактоого мүмкүндүк берет.

Адабияттар

1. Воробьев А.Е., Побыванец В.С., Мадаева М.З. жана башкалар. Түндүк Кавказдын тоолуу ландшафттарынын өнөр жайлык коопсуздугун камсыз кылуу үчүн чаңдын булгануусун азайтуунун методикалык аспектилери // "XXI кылымдагы тоо-кен мунайы, геологиялык жана геоэкологиялык билим берүү" III эл аралык конференциясынын материалдары. М.-Горно-Алтайск. 2008. S. 176.

2. Воробьев А.Е., Побыванец В.С., Мадаева М.З. жана башкалар. Түндүк Кавказдын кен казуучу аймактарын туруктуу өнүктүрүүнүн жана өнөр жай коопсуздугунун модели // Тг. VII Эл аралык конференция "Ресурстарды өндүрүүчү, калдыктары аз жана жер казынасын өздөштүрүүнүн экологиялык технологиялары". М.-Yerevan. 2008. S. 150.

3. Воробьев А.Е., Побыванец В.С., Мадаева М.З. Түндүк Кавказдагы тоо-кен жолдорундагы чаңдан экологиялык жүктү азайтуу, аймактын өнөр жай коопсуздугунун фактору. VII Эл аралык конференция "Ресурстарды өндүрүүчү, калдыктары аз жана жер казынасын өздөштүрүүнүн экологиялык технологиялары". М.-Yerevan. 2008. S. 283.

4. Воробьев А.Е., Побыванец В.С., Мадаева М.З. жана башкалар. Түндүк Кавказ аймагындагы тоо-кен ишканаларынан экологиялык жүк жана анын өнөр жай коопсуздугун камсыз кылуу // "XXI кылымда тоо-кен мунайы, геологиялык жана геоэкологиялык билим берүү" III эл аралык конференциясынын материалдары. М.-Горно-Алтайск. 2008. S. 182.

* * *