

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С МАЛЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ  
ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ  
ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATION  
OF THERMAL CONDUCTIVITY WITH A SMALL COEFFICIENT OF THERMAL  
CONDUCTIVITY

к.ф.-м.н., доцент Кожобеков К.Г. (ОшГУ)  
e-mail: kudayberdi.kozhobekov@mail.ru

**Аннотация.** Методом преобразования построена асимптотика решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности. Физический смысл рассматриваемой задачи – распространение тепла на бесконечной прямой с малым коэффициентом температуропроводности.

**Ключевые слова:** асимптотика, малый параметр, задача Коши, параболическое уравнение.  
**Annotation.** Using the transformation method, we constructed the asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a parabolic type equation with a small thermal diffusivity. The physical meaning of the problem under consideration is the distribution of heat on an infinite line with a small coefficient of thermal diffusivity.

**Key words:** asymptotics, small parameter, Cauchy problem, equation of parabolic type.

Как нам известно, уравнения с частными производными второго порядка параболического типа наиболее встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

обычно называют уравнением теплопроводности [1], коэффициент  $a$  называют коэффициентом температуропроводности.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in D, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in R, \quad (2)$$

где  $0 < \varepsilon$  – малый параметр,  $D = \{(t, x) : 0 < t < \infty, x \in R\}$ ,  $f(x)$  – ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на всей числовой оси.

Решение задачи существует и единственно [1]. Требуется построить полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру в области  $\bar{D}$ .

Действительно, при  $0 < \varepsilon$  явное решение задачи (1)-(2) можно построить методом Фурье, т.е. методом разделения переменных. Решение ищем в виде:

$$u(t, x) = Q(t)R(x),$$

тогда  $u_t(t, x) = Q'(t)R(x)$ ,  $u_{xx}(t, x) = Q(t)R''(x)$ .

Подставляя эти выражения в уравнение (1), имеем:

$$\frac{1}{\varepsilon} Q'(t)R(x) = Q(t)R''(x) \Rightarrow \frac{Q'(t)}{\varepsilon Q(t)} = \frac{R''(x)}{R(x)} = -\lambda^2, \lambda - const.$$

Отсюда находим  $Q(t)$  и  $R(x)$ :

$$\frac{Q'(t)}{\varepsilon Q(t)} = -\lambda^2 \Rightarrow Q(t) = c_1 e^{-\varepsilon \lambda^2 t},$$

$$\frac{R''(x)}{R(x)} = -\lambda^2 \Rightarrow R''(x) + \lambda^2 R(x) = 0 \Rightarrow R(x) = c_2 e^{\pm i \lambda x}.$$

Следовательно,

$$u_\lambda(t, x) = C(\lambda) e^{-\lambda^2 \varepsilon t \pm i \lambda x},$$

здесь  $\lambda \in \mathbb{R}$ , поэтому берем знак плюс:  $u_\lambda(t, x) = C(\lambda) e^{-\lambda^2 \varepsilon t + i \lambda x}$ .

Отсюда имеем:

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(t, x) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{-\lambda^2 \varepsilon t + i \lambda x} d\lambda. \quad (3)$$

где  $C(\lambda)$  определяется условием (2).

Учитывая начальное условие (2), имеем:

$$u(0, x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i \lambda x} d\lambda \Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i \lambda x} d\lambda,$$

применяя преобразование Фурье, имеем:

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \lambda \xi} f(\xi) d\xi.$$

Подставляя последнее выражение в (3), получаем:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} f(\xi) d\xi e^{-\lambda^2 \varepsilon t + i\lambda x} d\lambda.$$

Поменяв порядок интегрирования, и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 \varepsilon t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon t}}$$

получаем

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon t}} f(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Если асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) искать методом малого параметра [2]:

$$u(t, x) = u_0(t, x) + \varepsilon u_1(t, x) + \varepsilon^2 u_2(t, x) + \dots + \varepsilon^n u_n(t, x) + \dots \quad (5)$$

то имеем:

$$u_t(t, x) = \frac{\partial u_0(t, x)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial u_n(t, x)}{\partial t} + \dots$$

$$u_{xx}(t, x) = \frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial^2 u_n(t, x)}{\partial x^2} + \dots$$

Подставляя эти выражения в задачу (1)-(2), и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, имеем:

$$\frac{\partial u_0(t, x)}{\partial t} = 0, \quad u_0(0, x) = f(x); \quad \frac{\partial u_k(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_{k-1}(t, x)}{\partial x^2}, \quad u_k(0, x) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда после интегрирования с учетом начальных условий имеем:

$$u_0(t, x) = f(x), \quad u_1(t, x) = t f''(x)$$

$$u_k(t, x) = \frac{t^k}{k!} f^{(2k)}(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ряд (4) примет вид:

$$u(t, x) = f(x) + \varepsilon t f^{(2)}(x) + (\varepsilon t)^2 f^{(4)}(x) + \dots + (\varepsilon t)^n f^{(2n)}(x) + \dots$$

этот ряд является асимптотическим при  $0 \leq t < 1/\varepsilon$ ,  $x \in R$  и теряет свойство асимптотичности при  $1/\varepsilon \leq t$ ,  $x \in R$ .

Нетрудно заметить, что если начальная задача (1)-(2) рассматривается на конечном отрезке времени, т.е.  $0 \leq t \leq T - const$  то задача (1)-(2) регулярно возмущенная, в противном случае, т.е. в нашем случае сингулярно возмущенная точнее бисингулярно возмущенное [3-8].

Чтобы получить равномерное разложение решения задачи (1)-(2) мы преобразуем точное решение (4) в следующем виде [7,8]:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{1+\varepsilon t} \left( \frac{\sqrt{1+\varepsilon t}\xi - \sqrt{1+\varepsilon t}x}{\sqrt{4\varepsilon t}} \right)^2} f(\xi) d\xi,$$

Пусть  $s = \sqrt{\frac{1+\varepsilon t}{4\varepsilon t}} (\xi - x)$ , тогда  $\xi = \sqrt{\frac{4\varepsilon t}{1+\varepsilon t}} s + x$ ,  $d\xi = \sqrt{\frac{4\varepsilon t}{1+\varepsilon t}} ds$ .

Поэтому

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{1+\varepsilon t}} f\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon t}} s + x\right) ds.$$

Произведем еще одно преобразование, пусть  $t = \frac{1}{\varepsilon\eta} - 1$ , тогда

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{1+\varepsilon t}} f\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon t}} s + x\right) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\left(1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon\right)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}} f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}} s + x\right) ds = \\ &= \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}} f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}} s + x\right) ds. \end{aligned}$$

Учитывая разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\eta}{1+\eta} + \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3 + \frac{35}{128} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4 + \frac{63}{256} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5 + \dots$$

получаем

$$u(\eta, x) = \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}} f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right) ds \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\eta}{1+\eta} + \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3 + \frac{35}{128} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4 + \frac{63}{256} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5 + \dots\right)$$

где  $0 \leq \eta \leq 1/\varepsilon$ .

**Рассмотрим пример**, пусть  $f(x) = e^{-x^2}$ . Тогда

$$u(\eta, x) = \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}} e^{-\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right)^2} ds \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\eta}{1+\eta} + \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3 + \frac{35}{128} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4 + \frac{63}{256} \left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5 + \dots\right)$$

Литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.
2. Треногин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика // Успехи мат.наук. – 1970. – Т. 25. Вып. 4. – С. 123–156.
3. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. –2019. – Т. 29. – Вып 3. – С.1-9.
4. Alymkulov K., Tursunov D.A. Kozhobekov K.G. Singularly perturbed the parabolic equation in the case when unperturbed equation has unbounded solution // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017 Pushpa Publishing House, Allahabad, India. Vol. 102. № 2. – Pp. 329-336.
5. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота // Известия Иркутского госуниверситета. Серия «Математика», 2017. – Т. 21. – С. 108-121.
6. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 248 с.

7. Tursunov D.A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem // Lobachevskii J. Math. 38(3) (2017), 542-546.
8. Tursunov, D.A., Asymptotic solution of linear bisingular problems with additional boundary layer // Russian Mathematics 62(3) (2018), 60-67.
9. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота // Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 156, ВИНТИ РАН, М., 2018, 84–88.
10. Турсунов Д.А. Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле эллиптического уравнения с особенностями // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8. № 1. 2016. – С. 102-112.

\* \* \*

### УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF THE CAUCHY BISINGULAR PROBLEM ON AN INFINITE DIRECT FOR EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY

к.ф.-м.н., доцент Кожобеков К.Г.(ОшГУ)  
e-mail: kudayberdi.kozhobekov@mail.ru

Обобщенным методом погранфункций построена асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения параболического типа с особой линией. Получена оценка для остаточного члена, т.е. асимптотическое разложение обосновано.

A generalized method of boundary functions is used to construct the asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed equation of parabolic type with a singular line. An estimate is obtained for the remainder term, i.e. asymptotic expansion is justified.

Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon (u_t(x,t) - u_{xx}(x,t)) + t^3 u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in D, \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R, \quad (2)$$

где  $0 < \varepsilon$  – малый параметр,  $D = \{(x,t) | x \in R, 0 \leq t \leq 1\}$ ,  $f \in \tilde{C}^\infty(D)$ ,  $f(x,0) \neq 0$ ,  $u_t(x,t) = \partial u / \partial t$ ,  $u_{xx}(x,t) = \partial^2 u / \partial x^2$ ,  $\varphi \in \tilde{C}^\infty(R)$ ,  $\tilde{C}^\infty(D)$  – пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в  $R$  относительно  $x$ ,  $u(x,t)$  – неизвестная функция.

Решение задачи существует и единственно [1].

Задача (1)-(2) является бисингулярной [2]-[8], так как предельное (соответствующее невозмущенное,  $\varepsilon=0$ ) уравнение:

$$t^3 u^0(x, t) = f(x, t),$$

имеет не гладкое решение:

$$u^0(x, t) = \frac{f(x, t)}{t^3},$$

т.е. решение в точке  $t=0$  имеет полюс третьего порядка [6,7].

Если решение задачи (1)-(2) искать классическим методом пограничных функций, т.е. в виде:

$$u(x, t) = u^{(0)}(x, t) + \varepsilon u^{(1)}(x, t) + \dots + \varepsilon^k u^{(k)}(x, t) + \dots \quad (3)$$

то для неизвестных функций  $u_k(t, x)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  получим следующее:

$$t^3 u^{(0)}(x, t) = f(x, t),$$

$$t^3 u^{(1)}(x, t) = u_{xx}^{(0)} - u_t^{(0)},$$

$$t^3 u^{(k)}(x, t) = u_{xx}^{(k-1)} - u_t^{(k-1)}, \quad k \in N.$$

Отсюда

$$u^{(0)}(x, t) \sim \frac{f(x, 0)}{t^3}, \quad t \rightarrow 0;$$

$$u_{xx}^{(0)} - u_t^{(0)} \sim \frac{3}{t^4} f(x, 0) \Rightarrow u^{(1)}(x, t) \sim \frac{3}{t^7} f(x, 0), \quad t \rightarrow 0;$$

$$u_{xx}^{(1)} - u_t^{(1)} \sim \frac{21}{t^8} f(x, 0) \Rightarrow u^{(2)}(x, t) \sim \frac{21}{t^{11}} f(x, 0), \quad t \rightarrow 0.$$

Аналогично, для  $u^{(k)}(x, t)$  имеем

$$u^{(k)}(x, t) \sim \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4k-1)}{t^{4k+3}} f(x, 0), \quad t \rightarrow 0, \forall k \in N.$$

Поэтому соотношение (3) можно записать в виде

$$u(x, t) \sim \frac{1}{t^3} f(x, 0) \left[ 1 + 3 \frac{\varepsilon}{t^4} + \dots + 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4k-1) \left( \frac{\varepsilon}{t^4} \right)^k + \dots \right], \quad t \rightarrow 0.$$

Однако, этот ряд является асимптотическим только при  $t \in (\mu, 1]$ , где  $\mu = \varepsilon^{1/4}$ , и не может удовлетворить начальному условию (2). Для построения полного равномерного асимптотического разложения решения задачи (1)-(2) применяем обобщенный метод погранфункций [6]-[8].

Асимптотическое решение задачи (1)-(2) ищем в виде

$$u(x,t)=Z(x,t)+W(x,\tau), \quad (4)$$

где  $Z(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z^{(k)}(x,t)$ ,  $W(x,\tau) = \sum_{k=-3}^{\infty} \mu^k w^{(k)}(x,\tau)$ ,  $\varepsilon = \mu^4$ ,  $\tau = t / \mu$ ,

и функции

$$z^{(k)}(x,t) \in \tilde{C}^{\infty}(D), W(x,\tau) \in \tilde{C}^{\infty}(D_1), D_1 = \{(x,\tau) | x \in \mathbb{R}, 0 < \tau < \infty\}$$

Уравнение (1) запишем в виде [6]-[8]:

$$\varepsilon(u_t(x,t) - u_{xx}(x,t)) + t^3 u(x,t) = f(x,t) - h(x,t) + h(x,\mu\tau), \quad (5)$$

где  $h(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h^{(k)}(x,t)$  – пока неизвестный асимптотический ряд и коэффициенты этого ряда выбираются при построении регулярного внешнего решения  $z^{(k)}(x,t)$  в области  $D$ .

Подставляя соотношение (4) в уравнение (5), мы получим следующие уравнения:

$$\varepsilon(Z_t(x,t) - Z_{xx}(x,t)) + t^3 Z(x,t) = f(x,t) - h(x,t), \quad (6)$$

$$\mu^3 (W_{\tau}(x,t) - \mu W_{xx}(x,t)) + \mu^3 \tau^3 W(x,\tau) = h(x,\mu\tau). \quad (7)$$

Начальное условие для  $W(x,\tau)$  примет вид

$$W(x,0) = \varphi(x) - V(x,0). \quad (8)$$

Из (6), имеем

$$t^3 z^{(0)}(x,t) = f(x,t) - h^{(0)}(x,t),$$

$$t^3 z^{(k)}(x,t) = g^{(k)}(x,t) - h^{(k)}(x,t), k \in N,$$

где  $g^{(k)}(x,t) = (z_{xx}^{(k-1)}(x,t) - z_t^{(k-1)}(x,t))$ .

Если функцию  $h^{(0)}(x,t)$  выбрать следующим образом

$$h^{(0)}(x,t) = h^{(0,0)}(x) + h^{(0,1)}(x)t + h^{(0,2)}(x)t^2,$$

где  $h^{(0,k)}(x) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k} / k!$ ,

то,



$$z^{(0)}(x, t) = \frac{f(x, t) - h^{(0)}(x, t)}{t^m} \in \tilde{C}^\infty(D).$$

Для  $z_k(x, t)$  имеем:

$$z_k(x, t) = \frac{g^{(k)}(x, t) - h^{(k)}(x, t)}{t^3}, \quad k \in N.$$

Аналогично, как и выше, выбираем функции  $h^{(k)}(x, t) (k = 1, 2, \dots)$ .

Пусть

$$h^{(k)}(x, t) = \sum_{j=0}^2 g^{(k,j)}(x) t^j, \quad \text{где } g^{(k,j)}(x) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j g^{(k)}(x, 0)}{\partial t^j}, \quad j=1, 2.$$

Тогда  $z^{(k)}(x, t) \in \tilde{C}^\infty(D), k = 1, 2, \dots$

Таким образом, мы определили все  $z_k(x, t)$  и  $h^{(k)}(x, t) (k = 1, 2, \dots)$ .

Теперь перейдем к определению членов асимптотического ряда  $\sum_{k=-3}^{\infty} \mu^k w^{(k)}(x, \tau)$ .

Равенство (7) запишем в виде:

$$\mu^3 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} - \mu^4 \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + \mu^3 \tau^3 W(x, \tau) = h(x, \mu \tau).$$

Отсюда

$$Lw^{(-3)} := \frac{\partial w^{(-3)}(x, \tau)}{\partial \tau} + \tau^3 w^{(-3)}(x, \tau) = h^{(0,0)}(x), \quad w^{(-3)}(x, 0) = 0, \quad (9)$$

$$Lw^{(i-3)} = \frac{\partial^2 w^{(i-4)}(x, \tau)}{\partial x^2} + h^{(0,i)}(x) \tau^i, \quad w^{(i-3)}(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2, (x, \tau) \in D_1 \quad (10)$$

$$Lw^{(4k)} = \frac{\partial^2 w^{(4k-1)}(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad w^{(0)}(x, 0) = \varphi(x) - z^{(0)}(x, 0), \quad w^{(4k)}(x, 0) = -z^{(k)}(x, 0), \quad k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

$$Lw^{(4k+i+1)} = \frac{\partial^2 w^{(4k+i)}(x, \tau)}{\partial x^2} + g^{(k,i)}(x) \tau^i, \quad w^{(4k+i+1)}(x, 0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, k \in N, (x, \tau) \in D_1. \quad (12)$$

Докажем вспомогательную лемму.

**Лемма.** Пусть  $r(x, \tau) \in \tilde{C}^\infty(\bar{D}_1), a(x) \in \tilde{C}^\infty(R)$ . Тогда задача

$$z_\tau(x, \tau) + \tau^3 z(x, \tau) = r(x, \tau), \quad z(x, 0) = a(x), \quad (13)$$

имеет единственное решение  $z(x, \tau) \in \tilde{C}^\infty(D_1)$ .

**Доказательство.** После интегрирование дифференциального уравнения с начальным условием, имеем:

$$z(x, \tau) = a(x)e^{-\tau^4/4} + \int_0^\tau e^{(s^4-\tau^4)/4} r(x, s) ds,$$

и эта функция является единственным решением задачи (13).

Нетрудно заметить, что если

$$F(x, \tau) = O(\tau^k), \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad k - \text{const}, \quad \text{то } z(x, \tau) = O(\tau^{k-3}), \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Из этой леммы следует существование и единственность решения задач (9)-(12).

Оценим остаточный член асимптотического разложения (4). Пусть

$$R^{(n)}(x, t) = u(x, t) - u^{(n)}(x, t),$$

где  $u^{(n)}(x, t) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k z^{(k)}(x, t) + \sum_{k=-3}^{4n} \mu^k w^{(k)}(x, \tau)$ .

Тогда для остаточной функции  $R_n(x, t)$ , получим задачу:

$$\varepsilon \left( R_t^{(n)}(x, t) - R_{xx}^{(n)}(x, t) \right) + t^3 R^{(n)}(x, t) = O(\varepsilon^{n+1}), \quad R^{(n)}(x, 0) = 0, \quad x \in R. \quad (14)$$

С помощью преобразования

$$R^{(n)}(x, t) = e^{-t^4/4\varepsilon} r(x, t)$$

задачу (14) запишем в виде:

$$r_t(x, t) - r_{xx}(x, t) = O(\varepsilon^n e^{t^4/4\varepsilon}), \quad r(x, 0) = 0.$$

Решение этой задачи существует, единственно и представимо в виде [1, с. 254]:

$$r(x, t) = O(\varepsilon^n) \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau^4/4\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} d\xi d\tau.$$

Отсюда получаем

$$r(x, t) = O\left(\varepsilon^n e^{t^4/4\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow R_n(x, t) = O(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (x, t) \in \bar{D}.$$

Следовательно, справедлива

**Теорема.** Для решения задачи (1)-(2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливо асимптотическое разложение (4).

## Литература:

1. Zauderer, E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics [Text] / E. Zauderer // John Willey & Sons, INC., 1989.
2. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. –2019. – Т. 29. – Вып 3. – С.1-9.
3. Alymkulov K., Tursunov D.A. Kozhobekov K.G. Singularly perturbed the parabolic equation in the case when unperturbed equation has unbounded solution // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017 Pushpa Publishing House, Allahabad, India. Vol. 102. № 2. – Pp. 329-336.
4. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика», 2017. – Т. 21. – С. 108-121.
5. Shagi-di Shih Internal layers of parabolic singularly perturbed problems [Text] / Shagi-di Shih // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 87, No. 11 – 12, 831 – 844 (2007).
6. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // Труды Института математики и механики УрО РАН. Т. 22. № 1. 2016. – С. 271-281.
7. Турсунов Д.А. Асимптотическое решение бисингулярной задачи Робена // Сибирские электронные математические известия. 2017. – Т. 14. – С. 10-21.
8. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2016, № 1(39), 42–52.

\* \* \*

УДК 519.876.5

ANYLOGIC СИСТЕМАСЫНДА ИМИТАЦИЯЛЫК МОДЕЛДӨӨНҮН  
ӨЗГӨЧӨЛҮКТӨРҮ  
FEATURES OF SIMULATION IN ANYLOGIC

**Даникулова Х.О., Жапарали кызы Мукадас  
ОшМУнун магистрантары**

Макалада имитациялык моделөө жана anylogic системасы жөнүндө түшүнүктөр берилген. Anylogic системасында имитациялык моделдөөнүн өзгөчөлүктөрү изилденген, мисалдарда эксперименттер жүргүзүлгөн.

*The article outlines simulation and anylogic system. The features of simulation in the anylogic system are investigated, experiments are carried out using examples.*

Табиятта, айлана чөйрөдө болуп жаткан кубулуштарды окуп үйрөнүүдө, изилдөөдө математикалык моделдөө күчтүү курал экендиги талашсыз. Анткени математикалык модел универсалдуулук, тактык, прогноздоо ж.б.у.с. касиеттерге ээ. Алынган тыянактарды анализдөө жана синтездөөдө дагы бир топ артыкчылыктарга ээ. Бүгүнкү күндө компьютердик технологиялардын өнүгүүсү математикалык моделдөөнүн жаңы түрлөрүн

пайда кылуу да, мисалы, компьютердик моделдөө, имитациялык моделдоо [1-4] ж.б.у.с. Мамлекеттин өнүгүүсү мамлекеттин экономикасына түздөн түз көз каранды. Экономиканы өстүрүү үчүн “киреше ни көбөйтүп чыгымдарды азайтуу” маселесине негизделген экономикалык процесстерди көбөйтүү зарыл. Экономикалык процесстердин эртенки күнүн баалоо өтө зарыл, ошол себептен анын моделин түзүү талап кылынат. Ошондуктан макала актуалдуу деп эсептейбиз.

Макалада алгач модел жөнүндө кеңири түшүнүк беребиз. Моделдөөдө биз чыгымдарды азайтышыбыз керек, ошондуктан физикалык эмес имитациялык модел түзүү максатка ылайыктуу болот [4]. Анткени физикалык моделди жасоодо материалдар, жумушчулар, адистер керек болот, ал эми имитациялык моделдөөдө компьютер менен AnyLogic системасы жетиштүү.

### **1. Модел түшүнүгү жана моделдештирүү**

**Моделдөө (моделдештирүү)** – оригинал объекттин керектүү касиеттери жөнүндө маалымат алуу максатында бир объектти экинчиси менен алмаштыруу.

Мындан төмөнкүлөр келип чыгат:

**Моделдөө**, бул биринчиден, изилденип жаткан объектти кандайдыр мааниде алмаштырууга мүмкүн болгон объектти түзүү процесси же бул объектти табияттан издөө. Ушул аралык объект **модел** деп аталат. Модел изилденип жаткан оригинал объекттиге жараша ар түрдүү болушу мүмкүн. Модел ойдогу объект, макет, чийме, схема, математикалык формула, компьютердик программа ж.б.у.с. болушу мүмкүн.

**Моделдөө**, бул экинчиден, моделди сыноо, изилдөө. Б.а. моделдөө эксперимент менен байланышкан анын чыныгы (оригинал)дан айрымасы танып билүү процессинде «аралык бөлүк» болгон модел кошулат.

Демек, модел бир убакытта изилденүүчү объектти алмаштырган эксперименттин каражаты жана эксперименттин объектиси болот.

**Моделдөө**, үчүнчүдөн, модел менен алынган маалыматтарды оригиналга которуу (алып өтүү) же моделдин касиеттерин оригиналга ыйгаруу. Мындай которуу туура болушу үчүн модел менен оригинал ортосунда окшоштук болушу керек.

Окшоштук физикалык, геометриялык, структуралык (түзүмдүк) функционалдык ж.б. болушу мүмкүн. Окшоштук даражасы ар түрдүү болушу мүмкүн, бардык жактары боюнча теңдеш дал келүүдөн тартып негизги касиети менен гана дал келишине чейин. Белгилеп кетүү керек, модел изилденип жаткан объекттинин бардык жактары боюнча теңдеш дал келүүсү зарыл эмес.

**Модел** – изилденип жаткан объекттинин касиеттерин, элементтеринин өз ара байланыштарын, катыштарын жөнөкөй түрдө, окуп үйрөнүүгө ылайык чагылдырып ойлонуп табылган объект. Бул объект (тагыраак модель): схема, чийме, график, логика-математикалык формулалар, физикалык конструкциялар, макет ж.б. түрүндө болот.

**Моделдештирүү методу** аналогия принцибине б.а. реалдуу объектти түздөн-түз эмес, ага окшош жана анын изилдегенге ылайык объектилерди (моделдерди) окуп үйрөнүү мүмкүнчүлүгүнө негизделген.

Имитациялык моделдөө – тутумдун изилдөөнүн жана натыйжалуулугун баалоонун эң кубаттуу жана универсалдуу методу, алардын абаалы таасир этүүчү кокустук факторлоруна көз каранды.

Мисалдар. Учуучу аппараттар, жаныбарлардын популяциясы ж.б.у.с.

Имитациялык моделдөө негизинде Монте Карлонун статистикалык эксперименти жатат. Бул статистикалык экспериментти эсептөө техникасынын каражаттарысыз ишке ашырууга мүмкүн эмес.

Ошондуктан каалагандай имитациялык моделдөө аягында салыштырмалуу татаал же женил программалык азык (продукт) болот. Имитациялык моделдөө каалагандай универсалдык программалоо тилдеринде иштелип чыгышы мүмкүн.

Бүгүнкү күндө имитациялык моделдөөдө Pilgrim, GPSS, Simplex, AnyLogic, MATLAB Simulink программалык пакеттери кенири колдонулууда.

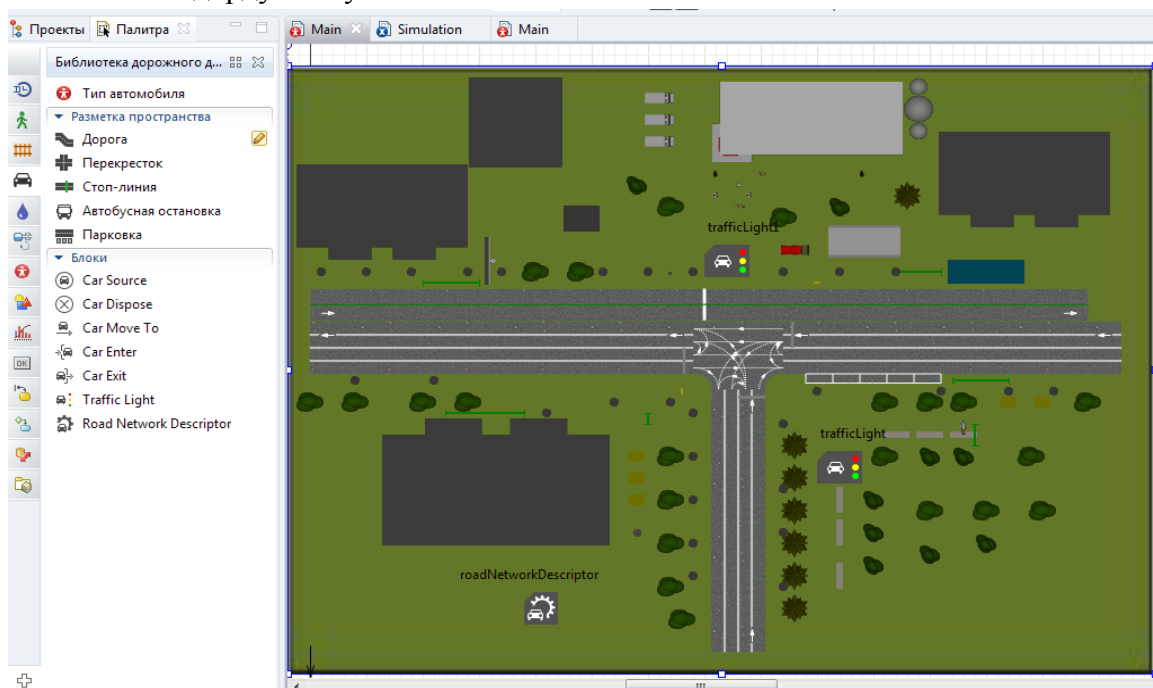
### Жөө жүргүнчүлөрдүн имитациялык модели

Бул имитациялык моделдин аты айтып тургандай жөө жүргүнчүлөргө арналган, тактап айтканда ал Ош шаарындагы Манас ата жана Ош кичи районундагы «Каныкей» ресторанынын айланасындагы жөө жүргүнчүлөр өтүүчү тилкеге арналган. Бул жерде жол чоң болгондуктан кооптуу, жөө жүргүнчүлөр өтүүчү тилке Манас ата кичи районундагы аялдамада, андан ары Ош кичи районундагы 16 кабаттуу үйдүн жанындагы жол чырактан (светафордон) гана өтүүгө болот. Арадагы аралык чоң болгондуктан адамдар жол чырак, жөө жүргүнчүлөр өтүүчү тилке жок жерден өтүшөт. Ушул эле корунуш «Каныкей» ресторанын жанында да бар. Биздин негизги максат жөө жүргүнчүлөр өтүүчү тилкенин жана адамдар өтүүдө авто унааларды токтотуп туруучу (баскычы бар жол чырактарды) атайын жол чырактардын зарылдыгын көрсөтүүчү имитациялык моделди түзүү.

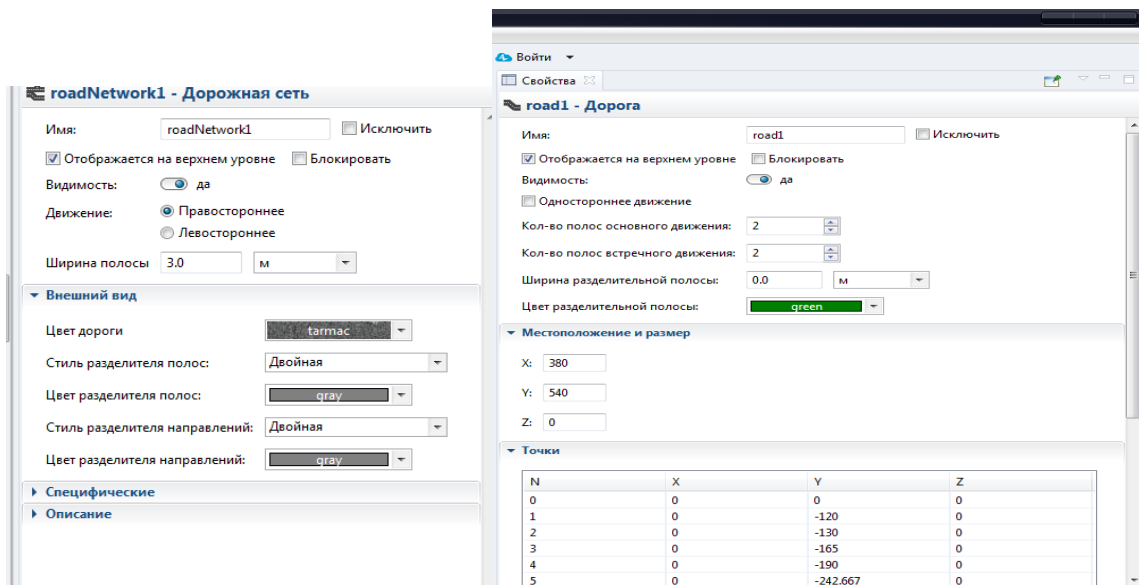
Имитациялык моделдөөнүн алгоритми

**1-кадам.** Алгач моделди жасаш учун AnyLogic системасын жүктөйбүз, анан жумушчу тилкеге жашыл газондун сүрөтүн койебуз. Сүрөттү «Презентация» бөлүгүнөн «Изображение» командасын колдонуп аткарылат.

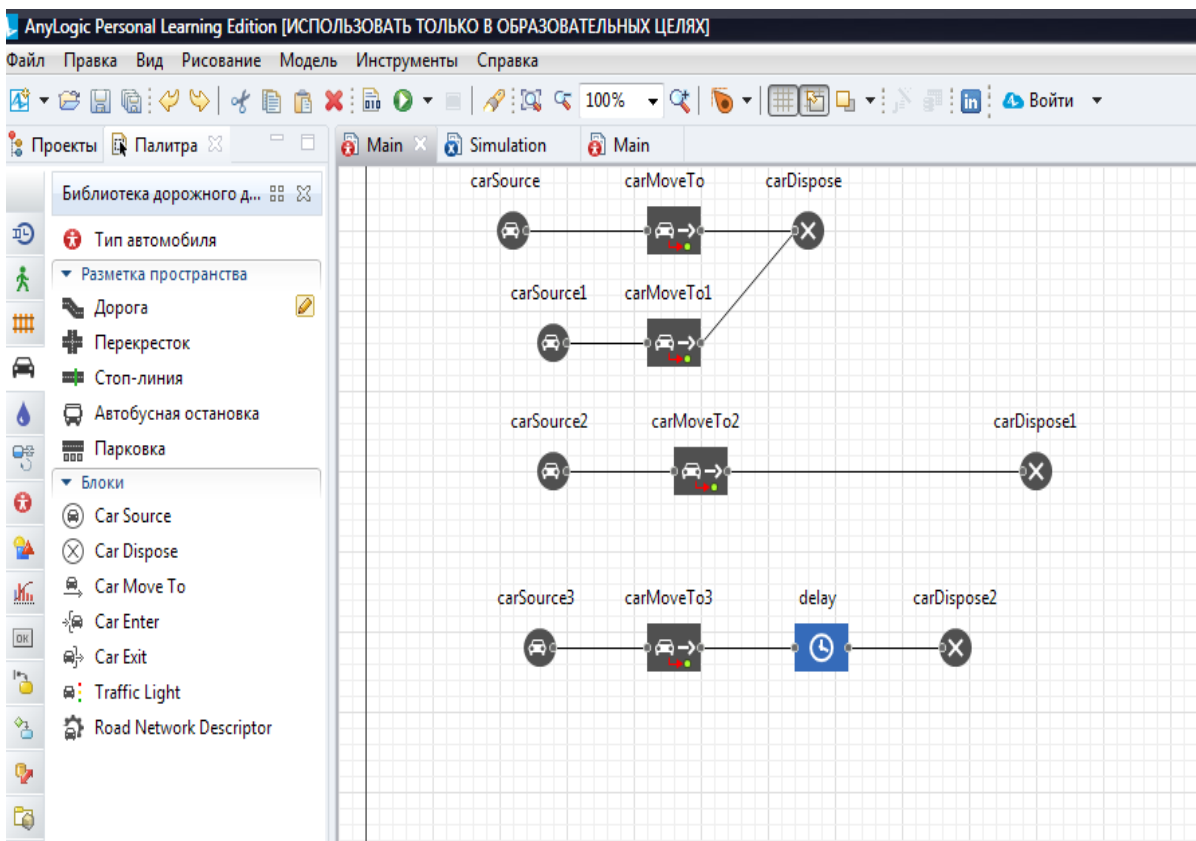
**2-кадам.** «Библиотека дорожного движения» бөлүмүнөн «Разметка пространство» тайпасынан жолдорду коебуз.



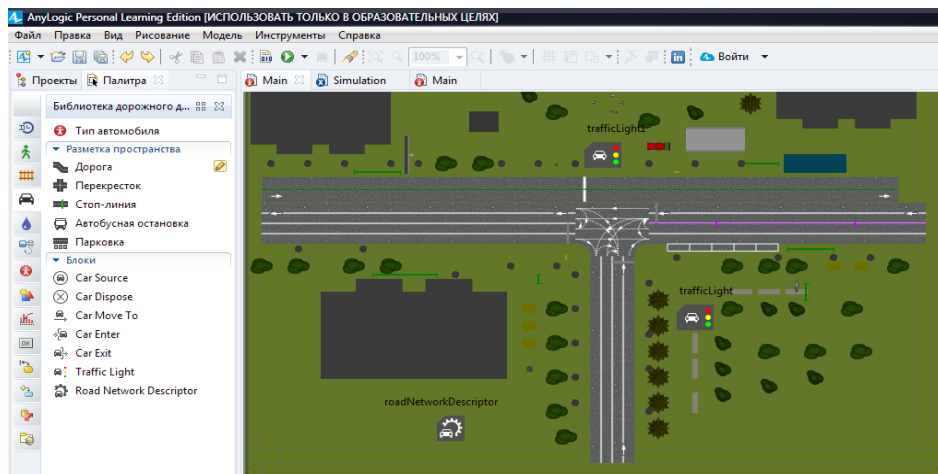
Жолдорду койгондон кийин алардын касиеттерин (свойства) кийиребиз (көрсөтөбүз).



**3-кадам.** Ушул эле болумдун «Блоки» тайпасынан командаларды алып автоунаалардын багытын жана автоунаалардын багытына туура келүүчү жол менен байланыштырабыз жана автоунаалардын ылдамдыгын, санын кийиребиз (көрсөтөүз).

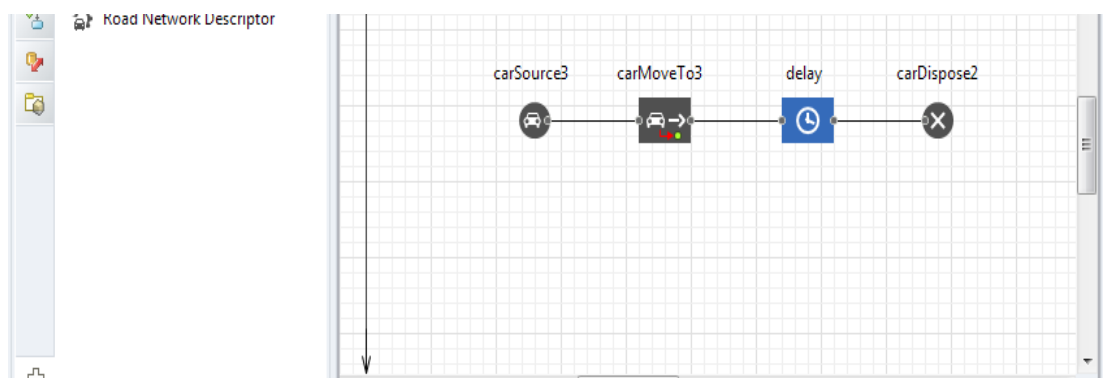


**4-кадам.** «Traffic Light» командасын колдонуп автоунааларга жол чырак орноттобуз.

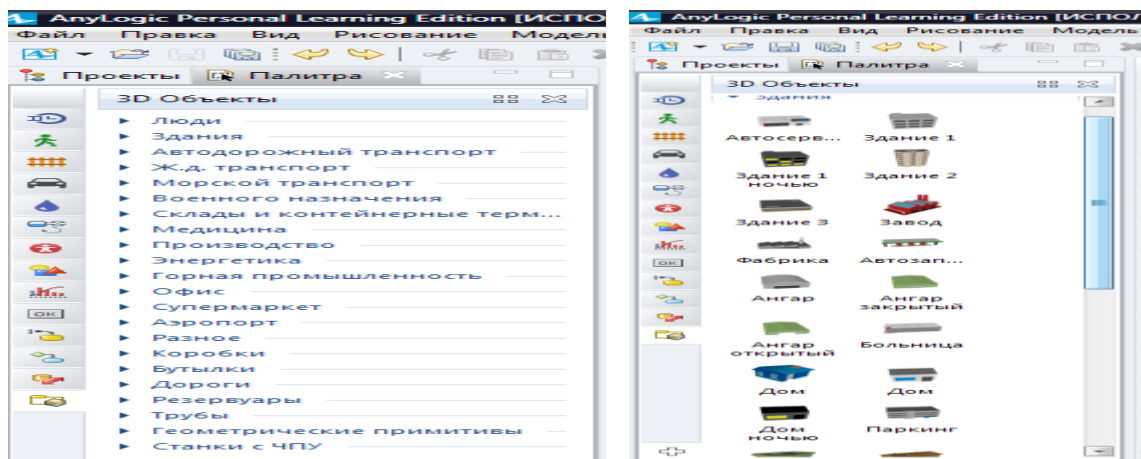


Жол чырактын касиетинен ага тиешелүү убакытты беребиз.

Автоунаа токтоочу (Парковка) коюуп автоунаалардын багытына автоунаа токтоочуну да кошобуз.



**5-кадам.** 3D объекттен моделди кооздош үчүн имараттарды, олтургучтарды, оорукананы, май куйуучу бекетти, бак-дарактарды, таштанды таштоочу челектерди жайгаштырабыз.

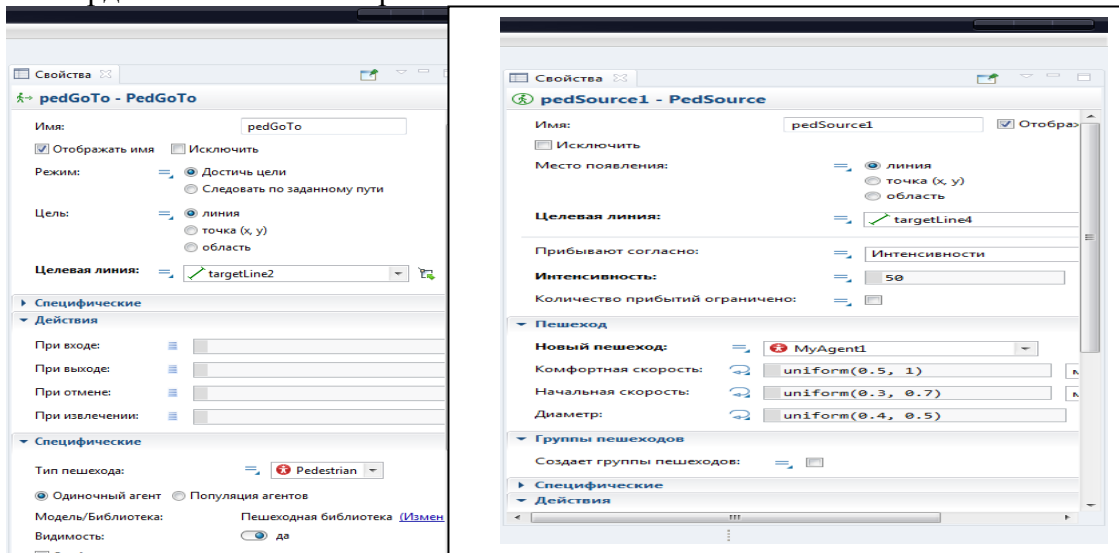


**6-кадам.** Жөө жүргүнчүлөрдү моделге кошуу учун «Пешеходная библиотека» болмуно өтүп «Целовая линия» командасын тандап жөө жүргүнчүлөрдүн багытына тууралап орнотобуз.

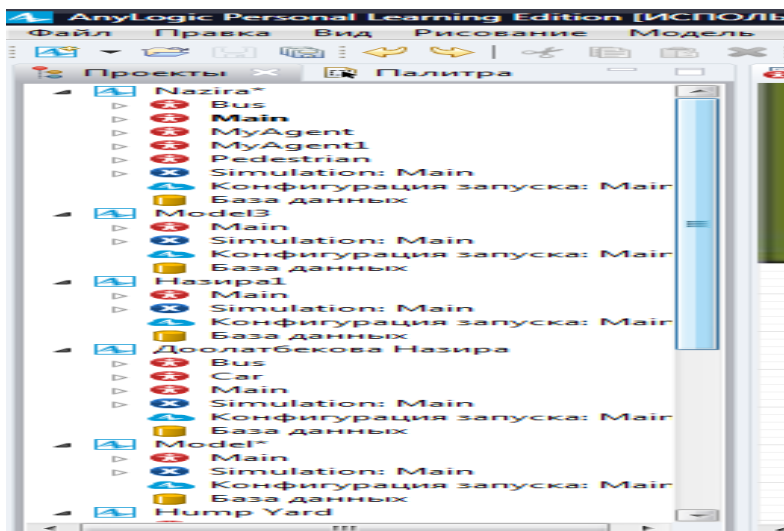
Сызыкты орноткондон соң адамдардын моделин коебуз

Адамдардын моделин сызыктар менен байланыштыруу үчүн алардын касиетине кайрылабыз.

Биз адамдардын моделин орноткондо алар адам көрүнүшүндө эмес, томолок бочка сыяктуу болушат аларды адам көрүнүшүнө айлантуу үчүн касиетине кайрылып **агент** деген жерден агентин алаштырабыз:

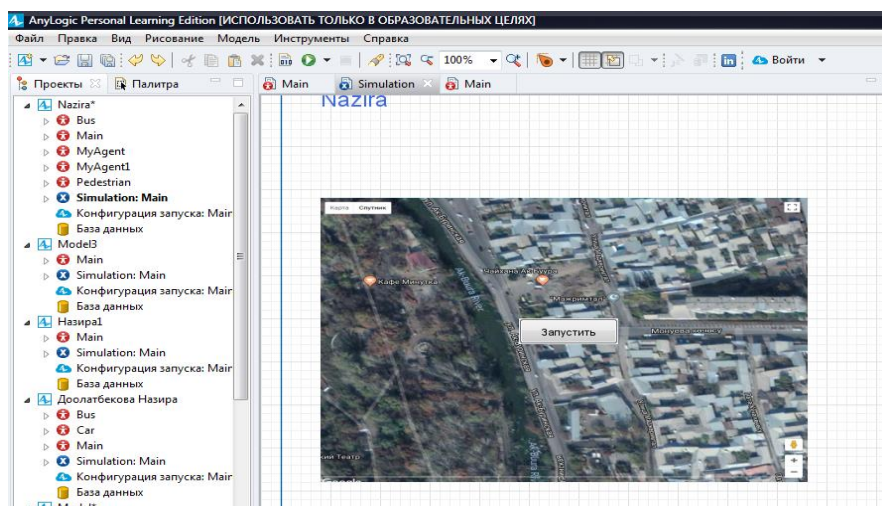


**7-кадам.** Моделди иштетуу максатында «Запустит» баскычы турган жерге сүрөт коюу үчүн «Политра» бөлүмүнөн «Проект» бөлүмүнө өтөбүз андан өзүбүз түзүп жаткан моделдин проектисин тандайбыз



Тандаган сон моделдин проектисинде турган Simulation Main бөлүмүн басканыбызда жаны терезе менен ачылат:





**8-кадам.** Кайрадан «Политра» бөлүмүнө өтүп «Презентация» группасынан «Изображение» командасын алып келебиз. Алып келгенибизден соң автоматтык түрдө компьютердеги папкалар ачылып сүрөт тандообузга шарт түзүп берет.

Сүрөттүү тандап, андан соң анын өлчөмдөрүн орнотуп «Запустить» баскычын сүрөттүн каалаган жерибизге коёбуз.

Модел толук аткарылып бүткөндөн соң моделибиздин иштөөсүн көрөбүз

Адабияттар

1. Шеннон Р. Имитационное моделирование — искусство и наука. М.: Мир, 1978.  
2. Боев В. Д. Концептуальное проектирование систем в AnyLogic 7 и GPSS World. ИНТУИТ.ru, 2013, 513 с.

3. Компьютерное моделирование: Пособие для практических занятий, курсового и дипломного проектирования в AnyLogic7:.. — СПб.: ВАС, 2014. 432 с.

4. Мичасова О.В. Имитационное моделирование экономических систем: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 186 с.

5. Григорьев И. AnyLogic за три дня. Практическое пособие по имитационному моделированию. ИНТУИТ.ru, 2016.

\* \* \*

**УДК 519.876.5**

## ANYLOGIC СИСТЕМАСЫНДА МОДЕЛДЕРДИН ЖАНА МОДЕЛДӨӨНҮН КЛАССИФИКАЦИЯСЫ CLASSIFICATION OF MODELS AND MODELING IN ANYLOGIC SYSTEM

*Жапарали кызы Мукадас, Даникулова Х.О.  
ОшМУнун магистрантары,*

Макалада Anylogic системасында моделдердин жана моделдөөнүн классификациясы изилденген. Ал үчүн алгач моделдөөнүн максаттары, моделдердин жана моделдөөнүн классификациялары, моделдөөнүн этаптары каралган.

The article explores the classification of models and simulations in the Anylogic system. For this, we first examined the goals of modeling, classification of models and modeling, and the stages of modeling.

## 1. Моделдөөнүн максаттары

**Прогноздоо** – башкарылуучу жана башкарылбоочу параметрлерден көз каранды болгон системанын абаалын баалоо. Прогноздоо – бул моделдөөнүн башкы максаты.

**Алгачкы объектти жакшы түшүнү жана түшүндүрүү.** Бул жерде башка маселелерге караганда оптималдаштырууга жана сезгирликтин анализине таандык маселелер көбүрөк жолугат.

**Оптималдаштыруу** – бул моделдештирилип жаткан системанын сапатынын негизги факторлорун эң жакшы көрсөткүчтөрүнө жеткирүү ( кээ бир факторлорду же чоңдуктарды минималдаштыруу же максималдаштыруу).

**Сезгирлик анализи** – бул моделдештирилип жаткан системанын иштешине көбүрөк басым жасаган факторлорду аныктайт. Мында алгачкы берилгендер болуп модел менен жүргүзүлгөн эксперименттин натыйжалары эсептелинет.

Көбүнчө модел окутуунун каражаты катарында колдонуу үчүн түзүлөт: тренажер моделдер, стендтер, оюндар ж.б.у.с.

Моделдөөнү таанып билүү методу катарында адамзат билип туруп же интуиция менен ардайым колдонуп келет.

## 2. Моделдерди жана моделдөөнү классификациялоо

Ар бир модел конкретүү максатта түзүлөт, ошондуктан ал уникалдуу болот. Бирок окшоштук жагдайлар алардын бардыгын көптүспөлдүгү боюнча класстарга бөлүп группалоого мүмкүнчүлүк берет.

Көбүрөк актуалдуу болгон **классификациялоо сынамалары:**

- объекттин моделдештирилип жаткан жагынын мүнөзү;
- объектиде болуп жаткан процесстин мүнөзү;
- моделди ишке ашыруу усулдары.

### 2.1. Объектинин моделдештирилип жаткан жагынын мүнөзү боюнча моделдерди жана моделдөөнү классификациялоо

Бул сынамага тиешелүү түрдөө моделдер төмөнкүдөй бөлүнүшөт:

функционалдуу (кибернетикалык); структуралык; маалыматтык.

**Функционалдык моделдер** моделдештирилип жаткан объекттин функциясын, абаалын гана чагылдырат. Бул учурда моделдештирилип жаткан объект кирүүчү жана чыгуучу бөлүктөргө ээ болгон «кара кутуча» катарында каралат. Объектинин физикалык мааниси, объектиде болуп жаткан процесстердин табияты, объекттин структурасы изилдөөчүнү кызыктырбайт, мында алар белгисиз болушуда мүмкүн.

Функционалдык моделдөөдө эксперимент кирүүчү таасир этүүчүлөрдү табигый же жасалма өзгөртүү менен моделдештирилип жаткан объекттин чыгуучу блогун күзөтүүдөн турат

Ушул берилгендер боюнча абаалдын модели кандайдыр математикалык функция көрүнүшүндөй тургузулат.

Мисалы, шахматтын компьютердик программасы – шахмат ойноп жаткан адамдын мээсинин иштешинин функционалдык модели.

**Структуралык моделдөө** - бул моделдештирилип жаткан объекттин структурасына (элементтери жана байланыштары) окшош моделди түзүү жана изилдөө. 1-Лекцияда айтып өтүлгөндөй окшоштук бул изилдөөнүн максатына жараша салыштырмалуу түшүнүк.



Имитациялык моделдөө моделди кандайдыр бир алгоритм – компьютердик программа көрүнүшүндө сунуштайт, программанын аткарылышында ушул моделдештирилип жаткан процесстин абаалынын имитациясын көрө алабыз.

Мындай моделдерди түзүү жана сыноо процесстери имитациялык моделдөө деп аталат. Алгоритмдин өзү имитациялык модел деп аталат.

*Имитациялык модел менен аналитикалык моделдин айырмасы:*

Аналитикалык моделдөөдө компьютер калькулятор катарында колдонулат. Аналитикалык модел компьютерде чечилет. Имитациялык модел – бул программа – компьютерде ишке ашырылат.

Имитациялык моделдер кокустук факторлорду да эске алат. Бул аналитикалык моделдер үчүн өтө татаал маселе.

Айрым учурларда экөөсүн колдонууга туура келет, мындай моделдөө аналитикалык-имитациялык моделдөө деп аталат.

**Материалдык моделдөө** чыныгы техникалык конструкцияларга негизделген. Макеттер, конструкциялар, шаблондор.

Практикада аралаш материалдык-абстракттык моделдөө да кездешет. Моделдештирилип жаткан объекттинин математикалык тилге которулбаган бөлүгүнө материалдык моделдөө калган жагына абстракттык моделдөө колдонулат.

### 3. Моделдөөнүн этаптары

*Математикалык моделдөө илим жана искусство* деп эсептелинет. Имитациялык моделдөө аймагындагы белгилүү адис Роберт Шеннон өзүнүн белгилүү илимий китебин "*Имитациялык моделдөө - бул искусство жана илим*" деп атаган.

Имитациялык моделдөө төмөнкү этаптардан турат

**Биринчи этап:** моделдөөнүн максатын тактоо. Бул бардык ишмердүүлүктүн негизги этабы. Максат – моделдөөнүн калган этаптарынын мазмунун маанилүү түрдө аныктайт. Изилдөөчүнүн алдыга койгон максатына жараша модел жөнөкөй же татаал системалардан түзүлөт.

Моделдөөнүнү максаттарын эске салып өтөбүз:

- Параметрлердин жаңы маанилеринде объекттинин абаалын прогноздоо (алдын ала айта алуу);
- Процесстин эффективдүүлүк көрсөткүчүн оптималдуу маанилерин камсыздай турган параметрлерди тандоо;
- Системанын ар түрдүү факторлорго карата сезгирлигин анализдөө;
- Изилденип жаткан процесстин кокустук параметрлеринин мүнөздөөчүлөрү жөнүндөгү ар түрдүү гипотезаларды текшерүү;
- Системанын абаалы менен ага таасир этүүчү факторлордун арасындагы функционалдык байланышты аныктоо;
- Моделдештирип жаткан объектини эксплуатациялоо үчүн керектүү алгачкы маалыматтарга ээ болуу, түшүнүү.

**Экинчи этап:** концептуалдык моделди түзүү. *Концептуалдык модель* (лат. *Conception* сөзүнөн алынган) – моделдештирилип жаткан объекттинин үйрөнүп жатканда мезгилде калыптануучу ойдогону аныктай турган деңгээлдеги модел. Бул этапта объект изилденет жана зарыл болгон жөнөкөйлөтүүлөр жана аппроксимациялар жүргүзүлөт. Маанилүү жактар аныкталат, экинчи даражалуу жактар жоюлат. Моделдердин ченөө бирдиктери жана ченөө аралыктары (диапазон) орнотулат. Эгерде мүмкүн болсо, концептуалдык модел белгилүү болгон жана жакшы иштелип чыккан системалар көрүнүшүндө туюнтулат: массалык тейлоо, башкаруу, авто башкаруу, ж.б. *Концептуалдык модел* моделдештирилип жаткан объекттинин проекттик документациясын же эксперименталдык текшерүүсүн үйрөнүүнү жыйынтыктайт.

Экинчи этаптын жыйынтыгы – моделдин жалпыланган схемасы, математикалык моделди түзүүгө даяр.

**Үчүнчү этап:** программалоо тилин тандоо же моделдөөнүн алгоритмин жана моделдин программасын иштеп чыгуу. Модел аналитикалык же имитациялык же алардык комбинациясы болушу мүмкүн. Эгерде модел аналитикалык болсо, анда изилдөөчү анын чечимин табуунун усулдарына ээ болушу керек.

Математикалык моделдөөнүн тарыхында ар түрдүү процесстерди моделдештирип жатып жаңы илимий ачылыштар жасалганы көп кездешет. Мисалы, кыймыл аракетти моделдештирүү зарылчылыгы дифференциалдык эсептөөлөрдүн (Лейбниц жана Ньютон) ачылышына жана өнүгүшүнө себеп болду. Кораблдардын туруктуулугун аналитикалык моделдештирүү маселеси академик А.Н. Крыловду жакындаштырып эсептөөлөр теориясын жана аналогдук эсептөө машиналардын пайда болушуна себеп болгон.

Үчүнчү этаптын жыйынтыгы – моделдөө жана изилдөө үчүн ыңгайлуу болгон тилде түзүлгөн программа.

**Төртүнчү этап:** экспериментти пландаштыруу. Эксперименттин объектиси бул математикалык модел. Эксперимент максималдуу даражада маалымат алууга мүмкүндүк берүүсү керек, чектөөлөрдү канааттандыруусу керек, берилгендерди зарыл болгон тактыкта жана ишеничтүү алууну камсыздоо керек. Экспериментти пландоо теориясы менен таанышып чыгуу максатка ылайыктуу болот.

Төртүнчү этаптын жыйынтыгы – эксперименттин планы.

**Бешинчи этап:** модел менен эксперимент өткөрүү. Эгерде модел аналитикалык болсо анда эксперимент бул алгачкы берилгендерди өзгөртүү менен эсептөөлөрдү аткаруу болуп эсептелет. Эгерде имитациялык болсо, анда модел компьютерде ишке ашырылат, мында алынуучу маалыматтар компьютерде кайра иштетилет. Эксперименттер моделдин алгоритми боюнча планга жараша өткөрүлөт. Заманбап моделдөө системаларында мындай мүмкүнчүлүк бар.

**Алтынчы этап:** эксперименттен алынган маалыматтарды кайра иштөө, анализдөө жана *интерпретациялоо*. Моделдөөнүн максатына жараша маалыматтарды кайра иштөөнүн ар түрдүү усулдарды колдонулат, алар: процесстердин жана кокустук чоңдуктардын ар түрдүү мүнөздөөчүлөрүн аныктоо, дисперсиондук, регрессиондук, фактордук ж.б. анализдерди жүргүзүү. Бул усулдар AnyLogic те автоматташтырылган. Анализдөө учурунда моделдин кемчилдиктери жоюлат жана толукталат, эгерде дал келбестик байкалса модел толугу менен алмаштырылат.

Адабияттар:

1. Шеннон Р. Имитационное моделирование — искусство и наука. М.: Мир, 1978.
2. Компьютерное моделирование: Пособие для практических занятий, курсового и дипломного проектирования в AnyLogic7. — СПб.: ВАС, 2014. 432 с.
3. Мичасова О.В. Имитационное моделирование экономических систем: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 186 с.

\* \* \*

УДК 517/928

ДЭЭРЛИК СЫЗЫКТУУ ЭМЕС БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СИНГУЛЯРДУУ  
ДҮҮЛҮККӨН ТЕНДЕМЕЛЕР  
СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО  
ПОРЯДКА

WEAKLY NONLINEAR SINGULAR PERTURBED FIRST-ORDER EQUATIONS

Алыбаев Н.К. аспирант  
ИАИТ НАН КР [atomkg@mail.ru](mailto:atomkg@mail.ru)

**Аннотация:** Бул жумушта дээрлик сызыктуу эмес биринчи тартиптеги сингулярдуу дүүлүккөн биринчи тартиптеги теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык өзгөрүшү тең салмактуулук абалдын туруктуулугу колдонулбастан изилденди.

**Аннотация:** В данной работе асимптотическое поведение решения слабо нелинейных сингулярно возмущенных уравнений первого порядка исследована без привлечения устойчивости точки покоя.

**Abstract:** In this paper, the asymptotic behavior of the solution of weakly nonlinear singularly perturbed first-order equations is studied without involving the stability of the stationary point.

**Түйүндүү сөздөр:** Сингулярдык дүүлүгүү, оператордук теңдемелер, итерация, бир калыпта жыйналуучулук.

**Ключевые слова:** Сингулярное возмущение, операторные уравнения, итерация, равномерная сходимость.

**Keywords:** Singular perturbation, operator equations, iteration, uniform convergence.

Постановка задачи

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = a(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon g(t, x(t, \varepsilon)) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0, \varepsilon) = x^0 \neq 0, \quad (2)$$

где  $0 < \varepsilon$  - малый вещественный параметр;  $t \in [0, t_0]$  - отрезок вещественной оси.

Уравнение вида (1) возникают при исследовании задач теории колебаний, автоматического регулирования, оптимального уравнения и называются сингулярно возмущенными [1-2].

Далее положительные постоянные не зависящие от  $\varepsilon$  будем обозначать буквами  $M_0, M_1, M_2, \dots$ .

Пусть выполняются условия:

У1.  $\forall t \in (0, t_0] (A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau < 0$  и  $A(t)$  – непрерывна)

У2.  $g(t, x)$  непрерывна на множестве

$H = \{(t, x) | t \in [0, t_0], |x| \leq |x^0| \cdot M_0\}$  и  $g(t, 0) \equiv 0$ ,

$$|g(t, \tilde{x}) - g(t, \tilde{\tilde{x}})| \leq M|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}|.$$

Задачи (1)-(2) в [3-5] исследованы в предположении: функция  $a(t)$  на отрезке  $[0, t_0]$  удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

В данной работе такие ограничения сняты. Из (1) полагая  $\varepsilon = 0$  получим вырожденное уравнение

$$0 \equiv a(t)\xi(t) \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет решение  $\xi(t) \equiv 0$ .

Исследуем задачу

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = 0 \text{ для } t \in [0, t_0]. \quad (4)$$

Решение задачи

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполняются условия У1- У2. Тогда  $x(t, \varepsilon)$  решение задачи (1)-(2) существует на отрезке  $[0, t_0]$  и для этого решения справедлива оценка

$$|x(t, \varepsilon)| \leq |x^0| \exp \frac{A(t)+Mt}{\varepsilon}. \quad (5)$$

Доказательство. Решение задачи (1)-(2) представим в виде

$$|x(t, \varepsilon)| \leq x^0 \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_0^t g(\tau, x(\tau, \varepsilon)) \exp \frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon} d\tau \quad (6)$$

Уравнение (6) запишем в виде операторного уравнения

$$x(t, \varepsilon) = B_\varepsilon x(t, \varepsilon). \quad (7)$$

(7) будем рассматривать в пространстве  $C(H)$  - пространство непрерывных функций в  $H$ .

Для доказательства существования решения уравнения (7) определим следующую итерацию

$$\begin{aligned} x_m &= B_\varepsilon x_{m-1}, \\ x_0 &\equiv 0, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Оценим  $x_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Имеем

$$\begin{aligned} |x_1| &\leq |x^0| \exp \frac{A(t)}{\varepsilon}; \\ |x_2| &\leq |x_1| + M \int_0^t |x_1| \exp \frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon} d\tau \leq |x_1|(1 + Mt), \\ |x_2| &\leq |x_1|(1 + Mt); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x_3| &\leq |x_1| + M \int_0^t |x_2| \exp \frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon} d\tau \leq \\ &\leq |x_1| + M|x_1| \left( t + \frac{Mt_2}{2} \right) = |x_1| \left( 1 + Mt + \frac{(Mt)^2}{2!} \right); \\ |x_3| &\leq |x_1| \left( 1 + Mt + \frac{(Mt)^2}{2!} \right); \end{aligned}$$

Далее для любого  $m \in N$ :

$$|x_m| \leq |x_1| \left( 1 + Mt + \dots + \frac{(Mt)^{m-1}}{(m-1)!} \right) \leq |x_1| \exp Mt. \quad (9)$$

Из (9) имеем

$$|x_m| \leq |x^0| \exp \frac{A(t) + \varepsilon Mt}{\varepsilon}. \quad (10)$$

Согласно У1 функция  $A(t)$  непрерывна на отрезке  $[0, t_0]$  и  $A(t) < 0$  на  $(0, t_0]$ , тогда существует значение  $t = \delta(\varepsilon)$  и на отрезке  $[0, \delta(\varepsilon)) \exp \frac{A(t) + \varepsilon Mt}{\varepsilon} \leq M_0$ .

Тогда  $\forall t \in [0, \delta(\varepsilon)) (|x_m| \leq |x^0| M_0)$ .

Если  $t \in [\delta(\varepsilon), t_0]$ , то  $\exp \frac{A(t) + \varepsilon Mt}{\varepsilon} = O(\varepsilon^n)$ .

Для этого случая также

$$|x_m| \leq |x^0| \cdot M_0.$$

Таким образом

$$\forall m \in N (x_m \in C(H))$$

и все оценки функций  $x_m$  являются законными.

Теперь докажем равномерную сходимость итераций.

Оценим

$$|x_m - x_{m-1}|, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$|x_2 - x_1| \leq M \int_0^t |x_1| \exp \frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon} d\tau \leq M|x^0| t \exp \frac{A(t)}{\varepsilon};$$

$$|x_3 - x_2| \leq |x^0| \frac{(Mt)^2}{2} \exp \frac{A(t)}{\varepsilon};$$

Продолжив процесс получим

$$|x_m - x_{m-1}| \leq |x^0| \frac{(Mt)^{m-1}}{(m-1)!} \exp \frac{A(t)}{\varepsilon}.$$

Составим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} |x_m - x_{m-1}|. \quad (10)$$

Имеем



$$\sum_{m=1}^{\infty} |x_m - x_{m-1}| \leq |x^0| \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Mt)^{m-1}}{(m-1)!} = |x^0| \exp \frac{A(t)+Mt\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда (10). Тогда итерация (8) сходится равномерно на отрезке  $[0, t_0]$  к некоторой функции  $x(t, \varepsilon)$  которая является решением уравнения (7). Если учесть (10) для этого решения справедлива оценка (5). Теорема доказана.

Пример. Пусть рассматривается задача (1)-(2) и

$$a(t) = \begin{cases} 2(t-1), & 0 \leq t \leq \frac{3}{2}; \\ 2(t-2), & \frac{3}{2} \leq t \leq \frac{5}{2}; \\ 2(t-3), & \frac{5}{2} \leq t \leq \frac{7}{2}; \\ \dots \dots \dots \\ 2(t-n), & \frac{2n-1}{2} \leq t \leq \frac{2n+1}{2}, n \in N. \end{cases}$$

Тогда

$$A(t) = \begin{cases} (t-1)^2 - 1, & 0 \leq t \leq \frac{3}{2}; \\ (t-2)^2 - 1, & \frac{3}{2} \leq t \leq \frac{5}{2}; \\ (t-2)^2 - 1, & \frac{5}{2} \leq t \leq \frac{7}{2}; \\ \dots \dots \dots \\ (t-2)^2, & \frac{2n-1}{2} \leq t \leq \frac{2n+1}{2}, n \in N. \end{cases}$$

Предположим для рассматриваемого случая выполняется условие У2.

Проверим выполнимость условия У1. Должно быть  $\forall t \in [0, \frac{2n+1}{2}] (A(t) \leq 0)$  причем только  $A(0) = 0$ .

На концах соседних отрезков  $A(t)$  принимает равные значения, а на каждом отрезка непрерывна. Следовательно  $A(t)$  - непрерывная функция.

Поскольку  $a(t)$  кусочно непрерывная функция, каждый из промежутков рассмотрим отдельно.

$$1. 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

$$A(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau = (t-1)^2 - 1, \quad A(0) = 0$$

Если  $0 < t \leq \frac{3}{2} (A(t) < 0)$ .

$$2. \frac{3}{2} \leq t \leq \frac{5}{2}, \text{ то}$$

$$A(t) = \int_0^{\frac{3}{2}} a(\tau) d\tau + \int_{\frac{3}{2}}^t a(\tau) d\tau = -\frac{3}{4} + (t-2)^2 - \frac{1}{4} = (t-2)^2 - 1,$$

Тогда  $\frac{3}{2} \leq t \leq \frac{5}{2}$  ( $A(t) < 0$ ).

Продолжая процесс для  $\frac{2n-1}{2} \leq t \leq \frac{2n+1}{2}$  получим  $A(t) = (t-n)^2 - 1$ .

Нетрудно проверить  $\forall t \in \left[\frac{2n-1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right]$  ( $A(t) < 0$ )

Подводя итог можем написать  $\forall t \in \left[0, \frac{2n+1}{2}\right]$  ( $A(t) < 0$ ). Условие У1 выполняется. Выполняются все условия теоремы. Следовательно для решения задачи (1)-(2) справедлива оценка (5).

Заметим, в рассматриваемом примере точка покоя присоединенной системы [1-2] в части рассматриваемых отрезков неустойчива. Тем не менее решение рассматриваемой задачи на всем промежутке находится вблизи точки покоя (или решения вырожденного уравнения).

### Вывод

Для рассматриваемого класса сингулярно возмущенных уравнений задача о предельном переходе решена без привлечения устойчивости точки покоя

### Литература:

1. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. –М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.
2. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. –М.: Наука, 1973. – 272 с.
3. Талиев А.А. Затягивание потери устойчивости для сингулярно возмущенных уравнений с непрерывными правыми частями [Текст] / А.А. Талиев //Вестник Томского гос. университета (математика и механика), №40(30), - Томск, 2014. – С. 36-43.
4. Талиев А.А. Нелинейное сингулярно возмущенные уравнения первого порядка с непрерывными правыми частями при нарушении устойчивости точки покоя [Текст] /А.А. Талиев //Издание (Поиск) Международный научный журнал-приложение Республики Казакстан (серия естественных и технических наук), №2(3), - Алматы, 2014. –С.130-137.
5. Талиев А.А. Сингулярно возмущенные уравненные уравнения при потери устойчивости с разрывными функциями-коэффициентами при линейных неизвестных функций [Текст] /А.А. Талиев // Вестник ЖАГУ №2 (28), - Жалал-Абад, 2014. –С. 177-185.

\* \* \*

УДК 517.5:517.91

КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ И ИХ  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ФУНКЦИОНАЛДЫК ӨЗ АРА БАЙЛАНЫШТАРДЫ КЛАССИФИКАЦИЯЛОО ЖАНА  
ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРДИ ИЗИЛДӨӨ ҮЧҮН АЛАРДЫ КОЛДОНУУ  
CLASSIFICATION OF FUNCTIONAL RELATIONS AND THEIR APPLICATION TO  
INVESTIGATE DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Кененбаева Г.М., д.ф.-м.н., ИМ НАН КР,  
г. Бишкек, Кыргызстан, gylaim@mail.ru  
Кененбаев Э., ИМ НАН КР,  
г. Бишкек, Кыргызстан, elaman0527@gmail.com*

**Аннотация.** Бул макалада бир эле функциянын маанилеринин ортосундагы өз ара байланыш каралат. Алардын чексиз жаначектүү сандагы маанилеринин ортосундагы өз ара байланышы; толук аныкталган жана жарым-жартылай аныкталган деген классификациясы сунуш кылынат. Мындай өз ара байланыштардын кээ бир дифференциалдык тендемелерди изилдөө үчүн колдонулушу көрсөтүлгөн.

**Урунттуусөздөр:** функционалдык өз ара байланыш, дифференциалдык тендеме, классификация, үзгүлтүксүз функция, жылмакай функция, аналитикалык функция.

**Аннотация.** В статье рассматриваются соотношения между значениями одной и той же функции. Предлагается их классификация: соотношения между бесконечным и между конечным количеством значений; полностью определенные и частично определенные. Приведены примеры. Показано использование таких соотношений для исследования некоторых дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** функциональное соотношение, дифференциальное уравнение, классификация, непрерывная функция, гладкая функция, аналитическая функция.

**Annotation.** There are considered relations between values of a same function in the paper. A certain classification of them is proposed: relations between infinite and between finite numbers of values; completely defined and partially defined ones. Examples are given. An application of such relations to investigate some differential equations is demonstrated.

**Keywords:** functional relation, differential equation, classification, continuous function, smooth function, analytical function.

### *Введение*

В большинстве работ по теории дифференциальных уравнений рассматриваются или решения в целом (гладкие функции, аналитические функции), или значения решений в близких точках (для приближенных методов). Вместе с тем, имеются отдельные результаты, где используются значения функций в отдаленных точках. Цель настоящей статьи - классификация наборов связанных между собой значений функций: наборы из бесконечного и конечного количества значений; полностью определенные наборы и частично определенные наборы, а также соответствующая классификация дифференциальных уравнений и описание возможности применения функциональных соотношений для решения.

## 1. Классификации наборов связанных между собой значений функций

Будем использовать обозначения:

$$x := (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, \Delta_x := \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

### 1.1. Бесконечные наборы значений функций.

1.1.1. Как известно, гармонические функции двух переменных удовлетворяют соотношению: среднее значение функции на любом круге (бесконечное количество точек) равно значению функции в центре круга.

Вместе с тем, в любом конечном наборе точек гармоническая функция может принимать любые значения. Пусть  $m=2$ , имеются точки  $x[1], x[2], \dots, x[k]$  и числа  $u[1], u[2], \dots, u[k]$ .

Построим по этим значениям многочлен Лагранжа  $L(x)$ , как функцию комплексного переменного:  $L(x[j])=u[j], j=1, \dots, k$  и определим гармоническую функцию  $U(x)=ReL(x)$ . Тогда  $U(x[j])=ReL(x[j])= Reu[j]= u[j], j=1, \dots, k$ . Таким образом, любые значения гармонической функции в конечном количестве точек между собой не связаны.

1.1.2. Если бесконечный набор точек не имеет сходящихся подпоследовательностей, то значения непрерывной функции в этих точках могут быть любыми. Если сходящиеся подпоследовательности существуют, то значения непрерывной функции в точках подпоследовательностей должны быть также сходящимися, хотя значения функции в отдельных точках, кроме предельных точек сходящихся подпоследовательностей, могут быть любыми.

### 1.2. Конечные наборы значений функций.

1.2.1. Значения линейной функции от одной скалярной переменной в двух ненулевых точках должны быть согласованы:

$$f(x[1])x[2]=f(x[2])x[1].$$

1.2.2. Значения линейной функции (в широком смысле, со свободным членом) от одной скалярной переменной в трех точках должны быть согласованы:

$$(f(x[1])-f(x[3]))(x[1]-x[3])=(f(x[2])-f(x[3]))(x[2]-x[3]).$$

1.2.3. Значения функции-многочлена степени  $k$  от одной скалярной переменной в  $(k+2)$  точках должны быть согласованы.

Пусть  $m=1$ , имеются числа  $x[1], x[2], \dots, x[k+2]$  и числа  $f[1], f[2], \dots, f[k+2]$ .

Построим по значениям  $x[1], x[2], \dots, x[k+1]$  и  $f[1], f[2], \dots, f[k+1]$  многочлен Лагранжа  $L(x)$   $k$ -порядка, должно быть  $L(x[k+2])=f[k+2]$ .

Если точки образуют арифметическую прогрессию, то такое согласование записывается в явном виде:

$$\sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j (-1)^j f(x[j+1]) = 0.$$

Например, для  $k=2$ :

$$f(x[1]) - 3f(x[2]) + 3f(x[3]) - f(x[4]) = 0.$$

1.2.4. Значения линейной функции от  $m$  скалярных переменных в  $(m+1)$  ненулевых точках должны быть согласованы.

1.2.5. Значения четной функции в двух симметрично относительно нуля расположенных точках должны быть равны.

1.2.6. Значения нечетной функции в двух симметрично относительно нуля расположенных точках должны быть противоположны.

1.2.7. Функция двух скалярных переменных - сумма функций от одной переменной каждая - удовлетворяет тождеству Асгейрссона для четырех точек:

Если  $m=2$ ,  $f(x) \equiv f_1(x_1) + f_2(x_2)$ ,  $u_1, u_2, v_1, v_2$  - любые числа, то

$$f(u_1, v_1) + f(u_2, v_2) \equiv f(u_1, v_2) + f(u_2, v_1).$$

1.2.8. Функция  $m$  скалярных переменных - сумма функций от одной переменной каждая - удовлетворяет аналогичному тождеству Асгейрссона для четырех точек, которые образуют прямоугольник, какие-либо две противоположные стороны которого параллельны одной из осей координат.

1.2.9. Функция  $m$  скалярных переменных - сумма функций от меньшего числа переменных каждая -

$$f(x) = g_1(x_2, \dots, x_m) + \dots + g_q(x_1, \dots, x_{q-1}, x_{q+1}, \dots, x_m) + \dots + g_m(x_1, \dots, x_{m-1}),$$

удовлетворяет обобщенному тождеству Асгейрссона для  $2^m$  точек [15].

Например, для  $m=3$ : пусть  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  - любые числа, тогда

$$\begin{aligned} & f(v_1, v_2, v_3) - f(v_1, v_2, v_6) - f(v_1, v_5, v_3) + f(v_1, v_5, v_6) - \\ & - f(v_4, v_2, v_3) + f(v_4, v_2, v_6) + f(v_4, v_5, v_3) - f(v_4, v_5, v_6) = 0. \end{aligned}$$

1.2.10. Значения  $\omega$ -периодической функции скалярной переменной для двух точек:

$$"|x[1] - x[2]| = \omega \Rightarrow "f(x[1]) = f(x[2])".$$

## 2. Классификации дифференциальных уравнений

Обзор литературы показывает, что единообразие в терминологии имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений и для дифференциальных уравнений в частных производных с количеством переменных не более двух и порядка не выше второго.

В работах [2], [3], [5], [6], [12], [18], [20], [21] и других предлагается классифицировать дифференциальные уравнения в частных производных по их записи, и рассматриваются такие преобразования, которые не меняют, хотя и упрощают вид записи. В [23], [24] предложено классифицировать уравнения по свойствам их решений, даже если

они принадлежат к различным типам. В [16], [17] показано, что уравнения, которые ранее относились к одному типу, имеют различные функциональные соотношения решений.

Рассмотрим примеры применения функциональных соотношений.

2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

2.1.1. Рассмотрим уравнение  $y^{(k)}(x)=0$ . Его решение - многочлен  $(k-1)$  порядка. Из 1.2.3 следует, что его значения можно находить для любого  $h>0$  последовательно по формуле:

$$y(x) = \sum_{j=1}^k C_k^j (-1)^{j+k} y(x - jh).$$

Примечание. Данный простой пример ставит задачу о классах обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых можно последовательно находить решения аналогичными способами.

2.1.2. Связь между значениями решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения в различных точках получил С. J. DelaValléePoussin(см. например [1]): уравнение

$$y^{(n)}(x)+p_1(x) y^{(n-1)}(x)+\dots+p_n(x) y(x) = 0, \quad a \leq x \leq b, p_k(x) \in C[a,b],$$

с условиями  $y(x[i]) = c_i, i=1, \dots, n$  имеет единственное решение при ограничении

$$\| p_1 \|_{[a,b]}(b-a) + \| p_2 \|_{[a,b]} (b-a)^2/2! + \dots + \| p_n \|_{[a,b]} (b-a)^n/n! < 1.$$

2.2. Дифференциальные уравнения в частных производных

Рассмотрим общее уравнение вида

$$\Delta_x u(x, y) = \Delta_y u(x, y), \quad (2)$$

$$y := (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n, \Delta_y := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}.$$

2.2.1. В случае  $m = n = 1$  из записи общего решения уравнения (2) в форме Даламбера и п.1.2.7 следует, что сумма значений функции  $u(t, x)$  в концах одной из диагоналей прямоугольника на плоскости  $(t, x)$ , стороны которого составляют  $45^\circ$  с осями координат, равна сумме значений функции  $u(t, x)$  в концах другой диагонали.

2.2.2. В случае  $m = n > 1$  для решения уравнения (2) при некоторых дополнительных предположениях имеет место тождество Асгейрссона для бесконечного количества точек, см. например [22]:

$$\int_{|\xi|=r} u(x + \xi, y) dS_\xi = \int_{|\eta|=r} u(x, y + \eta) dS_\eta.$$

2.2.3. Из п. 1.1.1 следует связь между значениями решения уравнения Лапласа  $\Delta_x u(x) = 0, m > 1$  в бесконечном количестве точек.

### 3. Заключение

Примеры, приведенные в настоящей статье, показывают, что в различных разделах теории дифференциальных уравнений доказывались и использовались отдельные функциональные соотношения, но не была проведена их классификация (выше предлагается возможная классификация), они не использовались систематически для

получения новых результатов. Предлагается разработать теорию и методику применения функциональных соотношений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бессмертных Г. А. О существовании и единственности решений многоточечной задачи Валле–Пуассена для нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1970, том 6, № 2, с. 298–310.
2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. - Москва: Изд-во Академии наук СССР, 1959. - 164 с.
3. Векуа И.Н. Дифференциальное уравнение с частными производными; методы комплексного переменного. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 2. – Москва: Советская энциклопедия, 1979. – С. 311-318.
4. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – Глава III. Построение целой функции с заданными элементами, с. 212-259; Глава V. Уравнения в конечных разностях, с. 307-398.
5. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
6. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. - 1991. - Т. 27. - № 10. - С. 1734-1745.
7. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
8. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
9. Кененбаева Г.М. Эффект аналитичности для дифференциальных и интегральных уравнений. – Saarbrücken, Deutschland: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. – 72 с.
10. Комленко Ю.В. Характеристика. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 5. – Москва: Советская энциклопедия, 1985. – С. 753-755.
11. Курант Р., Гильберт Р. Методы математической физики, 2-е издание. – Москва-Ленинград: Гостехтеориздат, 1951. – 544 с.
12. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – Москва: Высшая школа, 1977. – 431 с. – Глава 8. Уравнения и краевые задачи. – С. 157-173.
13. Панков П.С. Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. - Фрунзе: Илим, 1978. - 179 с.
14. Панков П.С., Матиева Г.М., Сабирова Х.С. Аксиоматическая теория характеристик и ее применение к аналитическим функциям // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 37-42.
15. Панков П.С., Сабирова Х.С. Составление функционально-характеристических уравнений с аналитическими функциями // Вестник Казахского национального технического университета им. Сатпаева, 2006. - № 5. – С. 135-141.
16. Сабирова Х.С. Влияние младших членов дифференциальных уравнений с частными производными на их характеристичность // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 38. – Бишкек: Илим, 2008. – С. 107-111.
17. Сабирова Х.С. Различие в характеристических свойствах волновых уравнений с различным количеством переменных // Вестник Международного университета Кыргызстана, № 1(20), 2011. – С. 58-61.
18. Рожденственный Б.Л. Гиперболического типа уравнение. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 1. – Москва: Советская энциклопедия, 1977. – С. 992-993.
19. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго

порядка. – Москва: Наука, 1964. – 208 с. – Глава II. Классификация уравнений второго порядка. – С. 33-46.

20. Солдатов А.П. Параболического типа уравнение. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 4. – Москва: Советская энциклопедия, 1984. – С. 195.

21. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, 4-е издание. – Москва: Наука, 1972. – 288 с. – Глава I. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка. – С. 11-22.

22. Благовещенский А. С. О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения. Математический сборник, 63(105):1 (1964). - С. 137–168.

23. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж.К., Маматжануулу Э. Элементы категории уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 88-95.

24. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. Элементы категории корректных уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2019, № 1. - С. 69-74.

\* \* \*

УДК 517.928

КОМПЛЕКСТИК ОБЛАСТТАРДА СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН  
ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН АСИМПТОТИКАЛЫК АЖЫРАЛМАСЫ  
(ЖӨНӨКӨЙ НӨЛДӨР БОЛГОН УЧУРУ)  
АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО  
ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ (СЛУЧАЙ ПРОСТЫХ  
НУЛЕЙ)  
ASYMPTOTIC EXPANSION OF SOLUTIONS OF LINEAR SINGULARLY PERTURBED  
EQUATIONS IN COMPLEX DOMAINS (THE CASE OF SIMPLE ZEROS)

Алыбаев К.С. – д.ф.м.н., профессор, ЖАГУ

e.mail: [alybaevkurmanbek@rambler.ru](mailto:alybaevkurmanbek@rambler.ru)

Тойгонбаева А. – к.ф.м.н., доцент, ОшГУ

*Аннотация.* Бул макалада сызыктуу сингулярдык дүүлүккөн дифференциалдык теңдеме комплекстик областта каралат. Денгээл сызыктардын методун колдонуу менен асимптотикалык ажырамасын тургузуу маселеси жөнөкөй нөл болгон учурда изилденген.

*Аннотация.* В данной статье рассматривается линейное сингулярно возмущенное уравнение в комплексной области. Исследована задача построения асимптотического разложения в случае простого нуля с использованием метода линий уровня.

*Annotation.* This article considers a linear singularly perturbed equation in a complex region. The problem of constructing an asymptotic expansion in the case of a simple zero using the level line method is investigated.

*Ачкыч сөздөр.* Сингулярдык дүүлүккөн теңдеме, чечим, асимптотикалык ажыралма.

*Ключевые слова.* Сингулярно возмущенное уравнение, решение, асимптотическое разложение.

*Key words.* Singularly perturbed equation, solution, asymptotic expansion



Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t, \varepsilon) = a(t)z(t, \varepsilon) + b(t), \quad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0, \varepsilon) = z^0 - const, \quad (2)$$

где  $0 < \varepsilon$  – малый вещественный параметр,  $t \in D \subset C$  и  $D$  конечная односвязная область, а  $t_0$  – её внутренняя точка.

Пусть выполняются условия:

- I.  $a(t), b(t) \in Q(D)$  – пространство аналитических функций в  $D$ .
- II.  $\forall t \in D : a(t) \neq 0$ .

Поставим задачу асимптотического разложения решения задачи (1) – (2) в области  $D$  по пара метру  $\varepsilon$ .

Задача (1) – (2) рассмотрена в работах [1-2] на явление затягивания потери устойчивости, погранслойные линии, регулярные и сингулярные области.

Задача (1) – (2) в такой постановке рассматривается впервые.

### Предварительные построения

В данном исследовании согласно условий I, II определим топологию области  $D$ .  
Определим функцию

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau.$$

Согласно I функция  $A(t) \in Q(D)$ . На основании II функция  $A(t)$  в точке  $t_0$  имеет единственный простой нуль. Следовательно область  $D$  полностью покрывается сетью взаимно ортогональных линий уровней функций  $\operatorname{Re} A(t)$  и  $\operatorname{Im} A(t)$  [3].

Введем в рассмотрение линию уровня

$$(p_0) = \{t \in D \mid \operatorname{Re} A(t) = 0\}.$$

Линия  $(p_0)$  проходит через точку  $t_0$  и область  $D$  делит на части  $D_1$  и  $D_2$ . Далее будем считать, что  $(p_0)$  не содержится ни в  $D_1$ , ни в  $D_2$ .

На линии  $(p_0)$  возьмём произвольную точку  $\tilde{t}$ . Существует линия

$$(q(\tilde{t})) = \{t \in D \mid \operatorname{Im} A(t) = q(\tilde{t}) - const\},$$

проходящая через точку  $\tilde{t}$ .

Известно [4], по линии  $q(\tilde{t})$  функция  $\operatorname{Re} A(t)$  является строго монотонной. Если учесть  $\operatorname{Re} A(\tilde{t}) = 0$ , то

$$\forall t \in D_1 (\operatorname{Re} A(t) < 0 \text{ или } \operatorname{Re} A(t) > 0).$$

Для определенности возьмём

$$\forall t \in D_1 (\operatorname{Re} A(t) < 0).$$

Тогда

$$\forall t \in D_2 (\operatorname{Re} A(t) > 0).$$

### Решение задачи

При решении поставленной задачи используем метод линии уровня [2]. Решение задачи выражается следующей теоремой:

**Теорема.** Пусть выполняются условия I, II. Тогда справедливо разложение

$$z(t, \varepsilon) = -\frac{b(t)}{a(t)} - \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \frac{b_k(t)}{a(t)} + \left( z^0 + \frac{b(t_0)}{a(t_0)} + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k \frac{b_k(t_0)}{a(t_0)} \right) \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} + \varepsilon^n \int_{t_0}^t b_{n+1}(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (3)$$

где функции  $b_k(\tau)$  определяются следующей рекуррентной формулой:

$$b_1(\tau) = \left( \frac{b(\tau)}{a(\tau)} \right)', \quad b_k(\tau) = \left( \frac{b_{k-1}(\tau)}{a(\tau)} \right)', \quad k = 2, 3, \dots, n+1.$$

**Доказательство.** Решение задачи (1) – (2) представим в виде

$$z(t, \varepsilon) = z^0 \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t b(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (4)$$

где  $A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$ .

Далее надо учесть, если  $\xi$  функция  $A(t)$  рассматривается на линиях  $\{t \in D \mid \operatorname{Re} A(t) = \text{const}\}$ ,  $\{t \in D \mid \operatorname{Im} A(t) = \text{const}\}$  в каждой точке таких соответствующих линий функции  $\operatorname{Re} A(t)$ ,  $\operatorname{Im} A(t)$  принимают постоянные значения не будучи равными тождественной постоянной.

Определим пути интегрирования для (4). Путь состоит из: части  $(p_0)$  соединяющего точки  $t_0, \tilde{t} \in (p_0)$ ; части  $(q)$  соединяющего точки  $\tilde{t}$  и  $t \in (D_1$  или  $D_2)$ .

В силу условия I значение функции (4) не зависит от формы путей, а определяется начальной и конечной точкой интегрирования.

С учетом выбранных путей интегрирования из (4) имеем

$$z(t, \varepsilon) = z^0 \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tilde{t}} b(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d(\tau) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tilde{t}}^t b(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (5)$$

где  $t \in (D_1$  или  $D_2)$ .

Если  $t \in (p_0)$ , тогда  $t = \tilde{t}$ , то из (5) имеем

$$z(\tilde{t}, \varepsilon) = z^0 \exp \frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tilde{t}} b(\tau) \exp \frac{A(\tilde{t}) - A(\tau)}{\varepsilon} d(\tau). \quad (6)$$

В (5) проведем следующее преобразование

$$z(t, \varepsilon) = \exp \frac{A(t) - A(\tilde{t})}{\varepsilon} \left[ z^0 \exp \frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tilde{t}} b(\tau) \exp \frac{A(\tilde{t}) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tilde{t}}^t b(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau \right]. \quad (7)$$

В (7) выражение содержащееся в [...] даёт, согласно (6), функцию  $z(\tilde{t}, \varepsilon)$ . Тогда (7) можно записать в виде

$$z(t, \varepsilon) = z(\tilde{t}, \varepsilon) \exp \frac{A(t) - A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tilde{t}}^t b(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (8)$$

где  $t \in (D_1$  или  $D_2)$ .

Из (8) вытекает, асимптотическое разложение решения задачи (1) – (2) для  $(p_0)$  и  $D_1 \cup D_2$  надо провести отдельно.

1. Пусть  $t \in (p_0)$ . Для этого случая возьмём (6). Рассмотрим интеграл

$$J_1(\tilde{t}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tilde{t}} b(\tau) \exp \frac{A(\tilde{t}) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

По условию  $b(\tau), A(t) \in Q(D)$  и  $D$  конечная односвязная область. Тогда к интегралу  $J_1(\tilde{t})$  применима формула интегрирования по частям.

Имеем

$$J_1(\tilde{t}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{\tilde{t}} \left( -\frac{b(\tau)}{a(\tau)} \right) d \exp \frac{A(\tilde{t}) - A(\tau)}{\varepsilon} = -\frac{b(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} + \frac{b(t_0)}{a(t_0)} \exp \frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \varepsilon \int_{t_0}^{\tilde{t}} b_1(\tau) \exp \frac{A(\tilde{t}) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau,$$

где  $b_1(\tau) = (b(\tau)/a(\tau))'$ .

К интегралу в правой части также применима формула интегрирования по частям.

Получим

$$J_1(\tilde{t}, \varepsilon) = -\frac{b(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} + \frac{b(t_0)}{a(t_0)} \exp \frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} - \varepsilon \frac{b_1(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} + \varepsilon \frac{b_1(t_0)}{a(t_0)} \exp \frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \varepsilon \int_{t_0}^{\tilde{t}} b_2(\tau) \exp \frac{A(\tilde{t}) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \text{ где}$$

$$b_2(\tau) = (b_1(\tau)/a(\tau))'.$$

Продолжая процесс получим

$$J_1(\tilde{t}, \varepsilon) = -\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \frac{b_k(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} + \left( \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \frac{b_k(t_0)}{a(t_0)} \right) \exp \frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \varepsilon^n \int_{t_0}^{\tilde{t}} b_{n+1}(\tau) \exp \frac{A(\tilde{t}) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau,$$

где  $b_0(\tilde{t}) \equiv b_1(\tilde{t})$ .

Для решения задачи (1) – (2) при  $\tilde{t} \in (p_0)$  справедливо разложение

$$J_1(\tilde{t}, \varepsilon)_\varepsilon = -\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \frac{b_k(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} + \left( \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \frac{b_k(t_0)}{a(t_0)} + z^0 \right) \exp \frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \varepsilon^n \int_{t_0}^{\tilde{t}} b_{n+1}(\tau) \exp \frac{A(\tilde{t}) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \quad (9)$$

Отсюда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем асимптотическое представление (в (9) интеграл ограничен)

$$z(\tilde{t}, \varepsilon) \sim -\frac{b(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} + z^0 \exp \frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon}.$$

Если учесть  $A(\tilde{t}) = i Jm A(\tilde{t})$ , то  $z(\tilde{t}, \varepsilon)$  не имеет предела по  $\varepsilon \forall \tilde{t} \in (p_0)$ .

2. Пусть  $t \in D_1 \cup D_2$ .

Для асимптотического разложения решения  $z(t, \varepsilon)$  возьмём интеграл

$$J_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tilde{t}}^t b(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau$$

и получим

$$J_2(t, \varepsilon) = -\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \frac{b_k(t)}{a(t)} + \left( \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \frac{b_k(\tilde{t}_0)}{a_k(\tilde{t}_0)} \right) \exp \frac{A(t) - A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \varepsilon^n \int_{\tilde{t}}^t b_{n+1}(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (9)$$

где  $b_0(t) \equiv b_1(t)$ .

Для  $z(\tilde{t}, \varepsilon)$  учитывая (8), (9), (7) получим разложение

$$J_2(t, \varepsilon) = -\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \frac{b_k(t)}{a(t)} + \left( z^0 + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \frac{b_k(t_0)}{a_k(t_0)} \right) \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} + \varepsilon^n \int_{t_0}^t b_{n+1}(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \quad (10)$$

Теорема доказана.

В (10)  $A(t) = \operatorname{Re} A(\tau)$ ,  $A(\tau) = \operatorname{Re} A(\tau)$ .

Если  $t \in D_1$ , то  $\operatorname{Re} A(t) < 0$  и  $\operatorname{Re} A(t)$  убывает в части пути интегрирования от  $\tilde{t}$  до  $t$ , а в части от  $t_0$  до  $\tilde{t}$   $A(\tau) = i \operatorname{Im} A(\tau)$ .

Таким образом в (10) интеграл имеет порядок  $\varepsilon^{n+1}$ . Тогда

$$z(t, \varepsilon) \sim -\frac{b(t)}{a(t)} + \left( z^0 + \frac{b(t_0)}{a(t_0)} \right) \exp \frac{A(t)}{\varepsilon},$$

$a$  за пределы линии уровня  $(p_\varepsilon) = \{t \in D_1 \mid \operatorname{Re} A(t) = \varepsilon \ln \varepsilon\}$

$$z(t, \varepsilon) \rightarrow -\frac{b(t)}{a(t)}.$$

Если  $t \in D_2$ , то  $\operatorname{Re} A(t) > 0$  и за пределы линии  $(p_\varepsilon) = \{t \in D_2 \mid \operatorname{Re} A(b) = -\varepsilon \ln \varepsilon\}$ ,

$$z(t, \varepsilon) \rightarrow \infty.$$

#### Литература

1. Алыбаев.К.С, Тампагаров К.Б. Метод погранслойных линий построения регулярно и сингулярных областей для линейных сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями //Естественные и математические науки в современном мире: сб.статей по материалам XLVII международной научно-практической конференции. №10 (45). Россия, Новосибирск: СиБАК, 2016. - С.59-66.
2. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости //Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001г. – С. 190-200.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - Москва: Наука, 1973. – 739 с.
4. Федорюк М.В. Метод перевала. – Москва: Наука, 1977.-368с.

\* \* \*

УДК:621.311.2

КЫРГЫЗСТАНДЫН ГИДРОЭНЕРГЕТИКАЛЫК ПРОБЛЕМАЛАРЫ  
ПРОБЛЕМЫ ГИДРОЭНЕРГЕТИКИ В КЫРГЫЗСТАНЕ  
PROBLEMS OF HYDROPOWER IN KYRGYZSTAN

Биймырзаева Б.А. преподаватель  
ЖАГУ ТИПФ

**Аннотациясы:** Биздин өлкө, табияттын берген булактарын таасирдуу колдоно албай келебиз. Ал эми Кыргыз Республикасынын экономикасынын өнүгүүсүнө күчтүү түрткү берүүгө мүмкүн болгон ГЭС. Бүгүнкү күнгө чейин, өлкөнүн энергетикалык тармагына байланыштуу жабдуулардын эскиришинен энергетика сектору аксап келет. Электр энергиясын берүүчү жана бөлүштүрүүчү тармактардын, электр берүү линияларын, трансформаторлорун жанылоого жана Кыргызстандын гидроэнергетикасынын өнүгүүсүнө тоскоолдуктардын себепин түшүнүү.

**Аннотация:** Гидроэнергетической потенциал, способный дать мощный импульс развитию экономики Кыргызстана, пока наша республика не получает должного эффекта от благ, которыми наделила ее природа. На сегодняшний день энергетическая отрасль страны находится в состоянии кризиса ввиду изношенности оборудования, передающих и распределительных сетей, линий электропередачи, трансформаторов и др. Попробуем рассмотреть и понять причины что же мешает развитию гидроэнергетики в Кыргызстане.

**Abstract:** Hydropower potential, capable of giving a powerful impetus to the development of the economy of Kyrgyzstan, while our republic does not receive the proper effect from the benefits that its nature has endowed. To date, the country's energy sector is in a state of crisis due to worn-out equipment, transmission and distribution networks, power lines, transformers, etc. Let's try to consider and understand the reasons that hinders the development of hydropower in Kyrgyzstan.

**Түйүндүү сөздөр:** Гидроэнергетика, мамлекеттик-жеке өнөктөштүк, энергетика тармагы, дифференциалдуу тарифтер, жемкорлук схемалар.

**Ключевые слова:** Гидроэнергетика, государственно-частного партнерства, дифференцированный тариф, энергосектор, инвестиций в энергетику, коррупционные схемы

**Keywords:** Hydropower, public-private partnership, differential tariff, energy sector, investments in energy, corrupt schemes

Энергетика является важнейшей сферой жизнедеятельности кыргызского общества. В Кыргызской Республике эксплуатируется 18 электрических станций, включая 16 ГЭС и 2 теплоэлектроцентрали, расположенные в городах Бишкек (666 МВт) и Ош (50 МВт).

Электрическая сеть включает линии электропередачи напряжением 0,4-500 кВ общей протяженностью 86 820 км. Распределительные электрические сети выполнены на напряжение 0,4-35 кВ. Для теплоснабжения городов Бишкек и Ош в Республике эксплуатируются 493,2 км тепловых сетей [1].

Учитывая географическое положение Кыргызской Республики и природно-климатические условия, территория Республики разделена на семь экономических областей с двумя промышленно развитыми городами. Наличие тепловых и электрических сетей напряжением 0,4-500 кВ, гидроэлектростанций и тепловых электроцентралей в совокупности образует электроэнергетическую систему Кыргызской Республики.

Энергосистема Кыргызстана имеет возможность производить, транспортировать и распределять электроэнергию не только внутри страны, но и осуществлять экспорт, импорт и взаимные перетоки в соседние государства, участвовать в покрытии дефицита мощности и покрывать пиковые нагрузки в энергосистемах стран Центральной Азии. Электроэнергетика Республики обладает рядом специфических особенностей, которые оказывают влияние на перспективное развитие отрасли и диктуют необходимость реформ в энергетике. Наличие межгосударственных линий электропередач напряжением 10-500 кВ между республиками Казахстан, Узбекистан, Таджикистан и КНР, крупного водохранилища Токтогульской ГЭС с многолетним регулированием и значительное преобладание гидроэлектростанций является положительной особенностью энергосистемы в балансе выработки электроэнергии и мощности. Производство значительного объема электроэнергии на ГЭС, порядка 90%, существенно снижает ее себестоимость, что позволяет обеспечивать высокую эффективность энергосистемы. Неблагоприятной особенностью является то, что в энергосистему Республики поставляется около 95% энергоносителей, в том числе до 50% угля, практически полностью газообразное топливо и нефтепродукты [2].

Благодаря на значительный гидроэнергетический потенциал, способный дать мощный импульс развитию экономики Кыргызстана, пока наша республика не получает должного эффекта от благ, которыми наделила ее природа. Более того, на сегодняшний день энергетическая отрасль страны находится в состоянии кризиса ввиду старые оборудования, и в первую очередь, передающих и распределительных сетей, линий электропередачи, трансформаторов и др.

Одними из актуальных вопросов гидроэнергетического сектора нашей страны являются вопросы государственного регулирования, эффективности существующей системы тарифообразования, лицензирования, получения прав на строительство ГЭС, пробелы в законодательстве. Попытаемся рассмотреть и понять причины существующего положения вещей в гидроэнергетической отрасли, выяснить, что же мешает развитию гидроэнергетики в Кыргызстане и предложить меры правового характера, которые, по нашему мнению, могут дать толчок развитию гидроэнергетической отрасли Кыргызстана [3].

### **Причины и проблемы**

Проблемы отрасли: области защиты прав собственности, недостатки существующей тарифной политики, *коррупционные схемы внешних инвестиций в энергетику*.

Инфраструктурные проблемы: ненадежность энергоснабжения и необходимость модернизации и развития энергетического сектора, плохая дорожная сеть, отсутствие основных инфраструктурных услуг на местном уровне.

Потребность энергосектора в инвестициях для обеспечения надежного энергоснабжения на сегодняшний день оценивается в \$150 млн в год для распределительных компаний и \$350 млн в год для энергетической отрасли в целом в течение следующих 10 лет. Такие огромные суммы связаны с тем, что на протяжении последних 20 лет энергосектор испытывал постоянное недофинансирование, что привело к полному износу большинства генерирующих и передающих мощностей [4]. Проблемой энергосектора КР, помимо других проблем, является неоптимальная структура производства. Более 90 % электроснабжения в стране поступает от Токтогульской и находящихся ниже по течению ГЭС Нарынского каскада, на которые приходится 78 % всей установленной мощности производства электроэнергии в стране. Такая система делает энергетический сектор уязвимым перед неустойчивостью гидрологии, так как все выше перечисленные станции находятся в русле одной реки (р.Нарын) и это сказывается в зимнее время [5]. То, что Кыргызстан обеспечен большим объемом

гидроэнергетического потенциала – 142 млрд. кВт.ч, еще не говорит о самодостаточности энергоресурсов в стране. Прогнозные запасы органического топлива находятся в труднодоступных горных районах, так как добываемый объем топлива обеспечивает потребности республики в угле на 4,04 %, нефти на 2,49 %, газа на 0,29 %. Производимая электроэнергия на ГЭС обеспечивает потребности в энергоресурсах на 53,6 %. Для покрытия потребности страны почти 40 % топлива импортируется из соседних государств. Сюда входят и нефтепродукты, которые пока незаменимы электроэнергией от ГЭС [6]. Иначе говоря, наша страна энергодефицитная. Таким образом, исходя из топливно-энергетического баланса страны, Кыргызстан не может обеспечить свою энергетическую независимость от соседних государств.

Для того чтобы понять причины, мешающие развитию гидроэнергетики в Кыргызстане, нужно исследовать проблемы, с которыми сталкивается частный инвестор. Ниже кратко обозначены основные проблемы инвесторов:

1) Отсутствие конкуренции в сфере производства, распределения и продажи электроэнергии, что является результатом монополии государственных энергетических компаний и слабого развития малой и средней энергетики;

2) Коррупция в государственных органах, в том числе в электроэнергетических структурах, с которой инвестор сталкивается, обратившись в уполномоченные органы Кыргызской Республики. Как показывает практика, данный факт имеет порой определяющее значение для частного инвестора и, особенно, для иностранного;

3) сложный порядок получения разрешительных документов на право строительства ГЭС, необходимость получения различных лицензий на любой вид деятельности, связанный с электроэнергией: производство, передача, распределение, продажа, импорт, экспорт. Налицо чрезмерная зарегулированность отрасли со стороны государства, необходимо сокращать количество лицензий и упрощать процедуры получения разрешительных документов, а также устранять существующие пробелы в законодательстве;

**Предложения:**

1) Проблему отсутствия конкуренции в сфере производства, распределения и продажи электроэнергии можно решить путем развития малой и средней энергетики.

Наряду со строительством крупных энергетических объектов, таких как Камбаратинские ГЭС 1 и 2, Верхне-Нарынский каскад ГЭС, в целях повышения уровня энергетической безопасности страны и роста экспортного потенциала республики целесообразно поощрять строительство малых и средних ГЭС на небольших горных реках, имеющих достаточный гидроэнергетический потенциал. В первую очередь, следует стимулировать инвесторов вкладывать средства в завершение строительства тех малых и средних ГЭС, где уже имеются возведенные гидротехнические сооружения (плотины), в частности, Кировская ГЭС в Таласской области– 23 МВт, Ортокойская ГЭС в Иссык-Кульской области– 20 МВт, Папанская ГЭС в Ошской области– 20 МВт, Торткульская ГЭС в Баткенской области– 8 МВт.

С точки зрения бизнеса такие ГЭС более привлекательны, поскольку существенная доля затрат, связанных с возведением гидротехнических сооружений, уже произведена, и инвестору нужно лишь завершить строительство ГЭС, что потребует гораздо меньших вложений. Кроме того, в приоритетном порядке следует также привлекать инвестиции в восстановление ранее существовавших ГЭС(например, ГЭС Сокулук-1 и Сокулук-2 в Чуйской области, Ат-Башинская ГЭС в Нарынской области, Арасанская ГЭС в Иссык-Кульской области и др.[7].



**Аргументы:**

1. Равномерное распределение энергетических производящих мощностей по всей территории Кыргызской Республики. В случае реализации этих проектов электроэнергией будут обеспечены большее количество жителей, при этом не будет необходимости вкладывать значительные и трудноокупаемые финансовые и материальные ресурсы в строительство линий передачи электроэнергии от крупных ГЭС, расположенных на значительном расстоянии от небольшого поселка, села или завода.

2. Снижение нагрузки на реку Нарын и на каскад крупных ГЭС, уже существующих и планируемых к возведению на этой реке;

3. Решение проблемы дефицита электроэнергии потребителей отдаленных городов, сел и поселков, существующих и будущих промышленных объектов, за счет энергии, вырабатываемой малыми и средними ГЭС. Зачастую строить крупные ГЭС в отдаленных, труднодоступных районах неэффективно, гораздо выгоднее построить и эксплуатировать в таких условиях малую ГЭС.

4. Поощрение строительства малых и средних ГЭС улучшит конкуренцию на энергетическом рынке страны, предоставив потребителям альтернативу крупным производителям, которые на данный момент являются монополистами на рынке Кыргызстана.

5. Принадлежащих государству, и будет стимулировать всех участников рынка повысить качество предоставляемых услуг, а крупные государственные энергетические компании снизить коммерческие и технические потери, которые в настоящее время превышают 40%; [8].

6. Создание новых рабочих мест(прежде всего в регионах) для обслуживания малых и средних ГЭС, частичное решение проблемы занятости населения;

7. Возможность обеспечить рост объемов производства электроэнергии в стране и увеличить ее экспортный потенциал за счет строительства малых и средних ГЭС, не требующих больших финансовых вложений, быстроокупаемых, простых в эксплуатации и возводимых в сравнительно короткие сроки.

8. Проблема отсутствия рыночных механизмов ценообразования на произведенную электроэнергию может быть решена, если рассмотреть возможность установления дифференцированного тарифа на электроэнергию для всех категорий потребителей, по принципу: «кто больше потребляет– тот больше платит»

**Предложения:**

В условиях достаточно большого расслоения потребителей электроэнергии, в том числе различных показателей потребления электроэнергии среди отдельных групп населения, было бы целесообразно заменить единый фиксированный тариф дифференцированным, размер которого будет зависеть от объема потребляемой электроэнергии по принципу: «кто больше потребляет– тот больше платит».

При этом в целях защиты социально уязвимых слоев населения, использующих электроэнергию в сравнительно небольших объемах для бытовых нужд, можно установить льготный месячный минимальный объем электроэнергии в кВт.ч., рассчитанный по среднему показателю потребления электроэнергии, до превышения которого тариф будет фиксированным и льготным. В случае же превышения установленного лимита потребитель должен будет оплачивать электроэнергию по дифференцированному тарифу с прогрессивной шкалой, повышающейся с каждым кВт.ч. потребленной сверх лимита электроэнергии. Дифференцированный тариф представляется социально справедливым и оправданным и позволит добиться следующих результатов:

1. Увеличить денежные поступления от продажи электроэнергии;
2. Энергетическая отрасль начнет приносить значительную прибыль государству;

3. У энергокомпаний появятся денежные средства для замены устаревшего и изношенного оборудования, строительства новых станций и линий электропередачи;

4. Для частных инвесторов, вкладывающих денежные средства в строительство малых и средних ГЭС, дифференцированный тариф будет дополнительным стимулом, гарантирующим короткие сроки окупаемости вложенных на строительство ГЭС финансовых и материальных ресурсов.

5. Наилучший толчок усовершенствованию малой и средней энергетики может дать применение механизма государственно-частного партнерства при реализации проектов по строительству, реконструкции и эксплуатации ГЭС [9].

Гидроэнергетическая отрасль относится к одной из стратегических отраслей экономики Кыргызской Республики, при этом приоритетным для государства является сохранение энергетических объектов в собственности государства, особенно, если речь идет о крупных ГЭС.

Но одновременно с этим без привлечения инвесторов в этот сектор невозможно его качественное развитие, модернизация, замена изношенного оборудования, строительство новых энергетических мощностей. В этой связи необходимо внедрить такие механизмы управления энергетическим сектором, при которых будет достигнут баланс интересов частного бизнеса и государства. Одним из инструментов, который мог бы применяться для достижения этой цели, является государственно-частное партнерство (далее– ГЧП) при строительстве, реконструкции и последующей эксплуатации новых энергетических мощностей. Государству выгоднее взаимодействовать с инвестором на основе ГЧП с условием, что построенная или реконструированная ГЭС остается в собственности государства, нежели приватизировать и передавать в частные руки стратегические энергетические объекты [10].

Однако для эффективной реализации ГЧП требуется проведение определенной работы в сфере законодательства Кыргызской Республики, с тем, чтобы обеспечить надлежащее правовое регулирование механизма ГЧП при строительстве, реконструкции, эксплуатации ГЭС. Следует отметить, что один важный шаг в этом направлении уже сделан: 22 февраля 2012 года был принят Закон Кыргызской Республики «О государственно-частном партнерстве в Кыргызской Республике», в котором предусмотрено, что он применяется, в том числе, по инфраструктурным объектам и инфраструктурным услугам в сфере производства, передачи и распределения электрической и тепловой энергии. Но предстоит еще работа по разработке и принятию положения, регулирующего порядок проведения тендеров по проектам ГЧП [11].

Аргументируя выше перечисленные предложения можно сказать что, на сегодняшний день законодательство Кыргызской Республики не дает определения понятий «малая ГЭС» и «средняя ГЭС». Отсутствие законодательно закреплённых определений малой и средней ГЭС создает трудности на практике. В итоге возникает неопределенность в том, какие ГЭС считать малыми, а какие средними. Реализация гидроэнергетического потенциала страны путем развития малой и средней энергетики при таких условиях представляется затруднительной.

Упростить процедуры получения разрешения на строительство малых и средних ГЭС, оптимизировать систему лицензирования.

Законы Кыргызской Республики «Об электроэнергетике» на практике не работают. Безусловно, данный факт существенно тормозит развитие гидроэнергетического сектора нашей страны. Кроме того, представляется целесообразным максимально упростить все разрешительные процедуры, устранить различные бюрократические препятствия, которые уже успели доказать свою неэффективность на практике. В частности, следует критически оценить целесообразность существующей системы лицензирования

деятельности по производству, передаче, распределению и продаже (импорт, экспорт) электроэнергии и, возможно, отменить некоторые лицензии. Как минимум было бы логичным отменить лицензии на продажу и экспорт электроэнергии, поскольку производитель электроэнергии, получивший лицензию на производство электроэнергии, имеет право ее продавать, в том числе экспортировать. Ограничение данного права необходимостью получения отдельных лицензий на продажу и на экспорт электроэнергии, выглядит, как минимум, нецелесообразно и ограничивает право производителя электроэнергии на свободное распоряжение произведенной электроэнергией [12].

Надо предусмотреть меры, стимулирующие инвесторов вкладывать инвестиции в развитие гидроэнергетики Кыргызстана. Необходимо стимулировать инвесторов вкладывать финансовые ресурсы в развитие гидроэнергетики Кыргызстана путем предоставления со стороны государства определенных льгот и преференций.

Ответственность энергетических компаний заключается в виде компенсации упущенной выгоды производителям возобновляемых источников энергии. Кроме того, в качестве стимулирующей меры государство могло бы рассмотреть возможность внесения изменений в законодательство с целью предоставления инвесторам на упрощенных условиях земельных участков под строительство ГЭС.

В частности, целесообразно было бы объединить предоставление права на строительство ГЭС с предоставлением земельного участка, чтобы, получив право на строительство ГЭС, инвестор одновременно получал и земельный участок под будущую ГЭС.

### **Заключение**

Делая выводы данной статье можно решить не только энергетические, но и социально-экономические проблемы нашей Республики. Все основные энергетические мощности в Кыргызстане созданы в советскую эпоху. Как дальше будет развиваться энергетика, если государство не решит проблемы дефицита электроэнергии потребителей отдаленных городов, сел и поселков, существующих и будущих промышленных объектов. За счет реализации следующих аргументов:

- равномерное распределение энергетических производящих мощностей по всей территории Кыргызской Республики;
- снижение нагрузки на реку Нарын и на каскад крупных ГЭС, уже существующих и планируемых к возведению на этой реке;
- решение проблемы дефицита электроэнергии потребителей отдаленных городов, сел и поселков, существующих и будущих промышленных объектов, за счет энергии, вырабатываемой малыми и средними ГЭС;
- гораздо выгоднее построить и эксплуатировать в таких условиях малую ГЭС;
- поощрение строительства малых и средних ГЭС улучшит конкуренцию на энергетическом рынке страны;
- создание новых рабочих мест(прежде всего в регионах) для обслуживания малых и средних ГЭС, частичное решение проблемы занятости населения;

### **Список литературы**

1. Касымова Валентина, Баетов Батыркул. "Энергетика Кыргызстана: состояние отрасли и перспективы межгосударственного сотрудничества" Центральная Азия и Кавказ, по. 6 (54), 2007, стр 116-127.
2. Энергетика: сила и слабость экономики Кыргызстана Автор ТалайбекКойчуманов - 26.08.2013

3. Касимова, В. Энергетическая политика и проекты Кыргызской
4. Республики [Текст] / В.Касимова, Б. Баатов // Центр. Азия и Кавказ. – 2010. –Т. 13, № 3. – С. 35-59.
5. “Программа разгосударствления и приватизации акционерного общества “Кыргызэнерго””, принятая правительством Кыргызской Республики 23 апреля 1997 г. Последние изменения и поправки были приняты 20 июня 2008 года Жогорку Кенешем Кыргызской Республики, Раздел 2.
6. Кемал Измаилов и др., “Реформа электроэнергетики Кыргызстана: Оценка Ситуации, Направления и Условия Успешного Развития”, исследование по проекту Фонда Сорос в Кыргызстане, 2007, стр. 17.
7. “Диагностический доклад по водным ресурсам Центральной Азии”, по проекту ЕЭК и ЭСКАТО ООН, 2002, с. 18.
8. Улар Матеев, “Перспективы и проблемы развития гидроэнергетики Кыргызстана, Институт Общественной Политики, 28 сентября 2007 г. (<http://ipp.kg/ru/analysis/552/?REDMANID=740f72a41efe38badec7b10b1c6c4011>).
9. World Bank, “Water Energy Nexus in Central Asia: Improving Regional Cooperation in the Syrdarya Basin.”
10. Оценка себестоимости электроэнергии. Отчет TetraTech Es, Inc. в рамках Программы USAID RESET [Электронный ресурс] / М-во энергетики и промышленности Кырг. Респ. 3 марта 2011 г. – Режим доступа:<http://www.energo.gov.kg/ru/sys/media/download/437/>
11. Мамасыдыков, А. Энергетическая безопасность Кыргызской
12. Республики: проблемы и пути их решения [Текст] / А. Мамасадыков, У.Ганыбаева // VERGI JURNALI. – Baki, 2015. – № 2 (122). – С. 109-118.

\* \* \*

**УДК 620(075.8)**

БУДУЩЕЕ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ  
АЛЬТЕРНАТИВАЛЫК ЭНЕРГЕТИКАНЫН КЕЛЕЧЕГИ  
THE FUTURE OF ALTERNATIVE ENERGY

Дуйшебаева Э.Ы., преподаватель  
Кенжекулов К.Н. к.т.н., и.о.доцент  
ЖАГУ ТИПФ

**Аннотация:** Приведены краткие сведения о современном состоянии и перспективах развития альтернативной энергетики в мире, а также плюсы и минусы их использования.

**Аннотация:** Альтернативдүү энергетиканын дүйнөдө азыркы абалы жана өнүгүү перспективасы тууралуу кыскача маалымат, ошондой эле аны колдонуудагы оң жана терс жактары.

**Abstract:** Brief information about the current state and prospects of alternative energy development in the world, as well as the pros and cons of their use are given.

**Ключевые слова:** энергетика, альтернативная энергетика, солнечная энергия, энергия ветра, геотермальная энергия, биогазовый генератор, сила приливов и отливов, энергосбережения.

**Ачык сөздөр:** энергетика, калыбына келүүчү энергетика, күн энергиясы, шамал энергиясы, геотермалдык энергия, биогаздык генератор, суунун күчү, энергияны үнөмдөө.

**Keywords:** energy, alternative energy, solar energy, wind energy, geothermal energy, biogas generators, the power of the tides, saving.

Современное человечество используют не только огромные энергетические ресурсы биосферы, но и небiosферные источники энергии (например, атомной), ускоряя геохимические преобразования природы. Некоторые антропогенные процессы направлены при этом противоположно по отношению к естественному ходу их в биосфере. Это рассеивание металлов руд, углерода и биогенных элементов, торможение минерализации и гумификации, освобождение законсервированного углерода (уголь, нефть, газ) и его окисление, нарушение процессов в атмосфере, влияющих на климат и т.п. В конечном итоге всё это приводит к экологическим кризисам в биосфере.

В биосфере еще идут процессы самовосстановления, она еще способна к усложнению и усовершенствованию, но многое говорит о том, что сама природа находится на грани выживания. Все мы являемся свидетелями своеобразного протеста природы против людей. Бельгийский ученый Ж.В.Войлард установил: за последние 20-30 лет частота засух возросла в 8 раз, случаи извержения вулканов – в 3 раза, повторяемость мощных циклонов – в 2 раза, наводнения участились в 2 раза, частота эпидемий удвоилась [1].

Во всех бедах, что в последнее время обрушились на нашу планету, принято винить традиционные виды энергии. И ухудшение климата, и загрязнение воздуха, и повышение земной и морской температуры – всё это якобы лежит на совести ископаемого топлива, а точнее, его активных пользователей. В связи с этим рождаются предложения: с углём, нефтью и газом завязать и перейти на альтернативные источники энергии- экологически безопасные и экономически выгодные. С другой стороны, истощение легкодоступных месторождений углеводородных энергоресурсов, экологический ущерб, наносимый их использованием, заставили цивилизованный мир осознать необходимость широкой интеграции в области нетрадиционных и возобновляемых источников энергии.

Чтобы решить энергетический вопрос окончательно, многие обратили внимание на альтернативные источники электроэнергии. К ним традиционно относят следующие :

- солнечные батареи;
- ветрогенераторы;
- тепло земли;
- биогазовый генератор;
- сила приливов и отливов.

Возьмём для начала солнечную энергию. На первый взгляд, её преимущества неоспоримы. Споры нет, что плюсов у солнечной энергии, конечно же, великое множество. В отличие от газа, угля и нефти, она является возобновляемой, и люди могут не переживать из-за того, что она вдруг кончится. НАСА подсчитала, что солнце будет исправно обогревать человечество ещё минимум 6,5 млрд. лет [4]. Потом солнце, правда, взорвётся, но в такую необозримую даль человек, как правило, не заглядывает. Солнечная энергия совершенно бесшумна, и её можно применять практически где угодно: хочешь-отапливай с её помощью дом, хочешь- питай космические спутники на околоземной орбите. Если говорить общепланетарными масштабами, то смело можно утверждать, что солнечная энергия постоянна и доступна. Пусть на одной половине земного шара ночь, но зато на другой половине день. А светит солнце повсюду- не только в экваториальной зоне, но и в северных широтах.

Важнейшее достоинство солнечного излучения- безвредность для окружающей среды процесса превращения его энергии в полезные виды. Более того, если при интенсивном использовании термоядерной энергии существует опасность перегрева атмосферы, то при больших масштабах превращения солнечной энергии в электрическую,

это явление может даже несколько компенсироваться. Удобна также, что солнечная энергия не нуждается в специальных средствах доставки. Страны, которые больше других развивают солнечную энергетику- это Китай и США, которые вместе дают две трети глобального роста солнечной энергии [3]. Но звание «крупнейшего солнечного завода» в мире никогда не удерживается долго, так как постоянно появляются новые солнечные парки.

Солнечная альтернативная электроэнергетика- неплохой вариант добычи электричества, но способ имеет несколько недостатков, главными среди которых можно назвать высокую стоимость организации электростанции, а также полную зависимость от погодных условий: в случае пасмурной погоды вырабатываемой мощности будет очень мало.

Ветер и вода! Ветер-один из первых источников энергии, освоенных человеком. Главную проблему, стоящую перед ветроэнергетикой, назовёт любой школьник: она кроется в нестабильности и неравномерности воздушных потоков. Грубо говоря, дует ветер- есть в доме свет, не дует- нет света. Неустойчивость ветра приводит к необходимости аккумуляции его энергии. Это удорожает установку, и в целом стоимость получаемой энергии оказывается выше, чем на гидростанциях и на многих тепловых электростанциях. Однако у всевозможных ветряков есть одно важное преимущество: они действительно поставляют чистую, возобновляемую энергию. Этим они и ценны. Потому и получают распространение в регионах, где ветру присуще хоть какое-то постоянство. Запасы энергии ветра в 100 раз превышают запасы гидроэнергии рек, однако в настоящее время двигатели, использующие энергию ветра, имеют установленную мощность всего 1300 МВт и дают в год около  $10^7$  МВт·ч энергии, что примерно составляет 0,002 доли мировых потребностей [5]. Данное время составлены программы исследований и разработок по созданию усовершенствованных ветряных двигателей электростанций.

Ветряки данное время широко применяются во многих развитых странах мира: Голландии, Дании, Японии и в США [2]. Особенно эффективно их использование в гористой местности или на морских побережьях, где постоянно бушуют сильные ветры. Мощности современной электростанции из ветряных генераторов достаточно, чтобы покрывать нужды крупных сельскохозяйственных объектов, удаленных от цивилизации или инфраструктуры небольших городов.

Примерно такой же расклад мы получим, если обратим свои взоры к гео- и гидротермальной энергии, использующий тепло земных недр. Так или иначе, её используют в 80 странах. Ведущее место в мире по использованию геотермальной энергии занимают Япония, Венгрия, Исландия, Италия, Новая Зеландия, США и КНР. На их долю приходится около 84% действующих мощностей [2]. Правда, их значительная часть идет на бальнеологические цели, особенно в Японии. На отопление расходуется 16% всей энергии.

Человечество в ожидании кризиса традиционной углеводородной энергетики прилагает все больше усилий для развития возобновляемых источников энергии. Сейчас в мире, по данным С.В.Алексеевко, общая мощность систем геотермального теплоснабжения составляет 17 ГВт, а мощность ГеоТЭС- 10 ГВт [1]. В последние годы наблюдается рост использования геотермальной энергии для производства электричества и прямого теплового потребления. В 2004 году в Кении начала работать крупнейшая геотермальная электростанция мира. Вторая по размерам станция находится в Исландии: Хеллишейди берёт тепло от источников, расположенных рядом с вулканом Хейнгидль [4]. К сожалению, не так много мест на планете, где геотермальные источники находятся в зоне досягаемости. И увы, почти все либо соседствуют с тектоническими разломами

планеты, либо сосредоточены в сейсмо неустойчивых регионах. Если бы не это обстоятельство, то наша планета уже давно превратилась в решето.

Немалую популярность в последние годы набрало использование биомассы. Суть его состоит в том, что из различной биомассы при брожении выделяется особый газ под названием целлюлозный этанол. Здесь альтернативное электричество можно получить, просто сжигая получаемый таким образом газ. Чтобы реализовать такую задумку, были разработаны специальные биогазовые установки, которые сейчас продаются по довольно доступным ценам. Наиболее выгодно их использовать различным фермерским хозяйствам, где биологические отходы являются неотъемлемой частью производственного цикла. Единожды потратившись на биогазовую конструкцию, человек может получить отличный источник близкого к природному газу, которого в итоге легко преобразовать как в тепло, так и в электричество.

Еще один интересный альтернативный источник энергии, который широко применяется в морских странах. Благодаря естественным приливам и отливам, вода постоянно движется. Если установить на некоторой глубине водяные турбины, то они используя это движение масс воды, будут вырабатывать довольно немалую мощность. Примечательно, что даже учитывая низкую скорость воды от приливов и отливов, водяные турбины могут показывать высокую эффективность работы. Это можно увидеть на примере крупнейшей в мире приливной электростанции, находящейся во Франции и способный давать целых 240 МВт мощности.

Сихвинская ПЭС- еще один выдающийся объект альтернативной энергетики, который расположен на северо-западном побережье в Южной Корее в искусственном заливе. Электростанция была введена в эксплуатацию в 2011 году. Страны, использующие энергию приливов и отливов, не ограничиваются прогрессивной Францией и технологичной Южной Кореей. Приливные электростанции эксплуатируются в Великобритании, Норвегии, Канаде, Китае, Индии, США [4]. Еще некоторые государства планируют строительство таких сооружений.

В странах – членах Международного энергетического агентства (МЭА) приоритет в структуре мероприятий, направленных на сохранение окружающей среды, отдан энергосбережению. С одной стороны, это позволяет решать проблемы, связанные со снижением энергоемкости экономики, а с другой энергосбережение способствует не только экономии инвестиций, необходимых для расширения генерирующих мощностей, но в то же время помогает развитию альтернативной энергетики. Масштабная реализация энергосберегающих проектов, осуществляемая во всем мире, способствует также замедлению темпов развития негативных экологических тенденций, вызванных значительным потреблением углеводородных ресурсов.

Для реализации проектов в области энергосбережения и повышения энергоэффективности важны не только капиталовложения. В условиях рыночной экономики не просто добиться ресурсосбережения, если для этого предприятиям – природопользователям надо вложить дополнительные средства, а конечный продукт будет иметь более высокую себестоимость или сопровождаться, в основном, экологическими позитивами (это происходит, например, при переходе от традиционных источников к возобновляемым). Однако государство может облегчить решение этой задачи, если предоставит налоговые льготы или введет обязательные для всех нормы, касающиеся ресурсосбережения. Именно здесь правительства многих развитых стран оказались предусмотрительны: они, ради скорейшего решения указанной проблемы, использовали законодательные регулирования. Так, еще в 1978 г. в США был принят закон, обязавший энергосети покупать по довольно высоким ценам электроэнергию от мелких производителей, использовавших для этого ветрогенераторы или другие

альтернативные способы. Государственная поддержка альтернативной энергетики проявилась в США и в форме налоговых льгот и субсидий для стимулирования развития солнечной энергетики. Благодаря этому новые технологии стали конкурентоспособными далее уже самостоятельно смогли продвигаться на рынке [4]. В Германии в 2000 г. был принят аналогичный американскому закон, который гарантировал всем частным владельцам солнечных батарей покупку электроэнергии по стабильным ценам. В результате за три года там наметился четырехкратный рост покупки фотоэлектрических элементов.

Вывод: Решая задачу уменьшения воздействия на окружающую среду традиционных методов получения энергии наука и производство изучают возможности получения энергии за счет альтернативных ресурсов, таких как энергия ветра, солнца, геотермальная и энергия волн и других источников, которые относятся к неисчерпаемым и экологически чистым.

Альтернативная энергетика- совокупность перспективных способов получения энергии, которые распространены не так широко, как традиционные, однако представляют интерес из-за выгоды их использования при низком риске причинения вреда экологии. Альтернативный источник энергии- способ, устройство или сооружение, позволяющее получать электрическую энергию и заменяющий собой традиционные источники энергии, функционирующие на нефти, добываемом природном газе и угле.

У альтернативных источников энергии будущее, поскольку используя природные возобновляемые источники, планета не будет загрязняться.

Согласно отчёту ООН, в 2008 году во всём мире было инвестировано \$140 млрд. в проекты, связанные с альтернативной энергетикой, тогда как в производство угля и нефти было инвестировано \$110 млрд. В 2009 году инвестиции в возобновляемую энергетику во всём мире составляли \$160 млрд., а в 2010 году- \$211 млрд. В 2010 году в ветроэнергетику было инвестировано \$94, 7 млрд., в солнечную энергетику- \$26,1 млрд. и \$11 млрд. – в технологии производства энергии биомассы и мусора. Двигателем стремительного роста ВИЭ за последние 25 лет стали именно «новые» виды энергии (прежде всего солнечная и ветроэнергетика) – их доля увеличилась с 1,5% в 1990 году до 6,3% в 2014 году и предположительно догонит гидроэнергетику в 2030 году, достигнув 16,3% [3].

Применение в строительстве альтернативных источников энергии и энергосберегающих технологий, позволяет нам не только экономить огромное количество природных ресурсов, но также сократить разрушающее воздействие на окружающую среду, так как проблема сохранения окружающей среды является особо актуальной в наше время.

Альтернативные источники энергии - это будущее человечества!

#### **Использованная литература:**

1. Денисов В.В. Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии-Ростов н /Д: Феникс, 2015.-382с.
2. Обозов А.Д. Возобновляемые источники энергии-Б., КГТУ, 2010. -270 с.
3. Быстрицкий Г.Ф. Общая энергетика- 3-е изд. -М. : КНОРУС, 2013.-296с.
4. Источники энергии - [www.3dnews.ru/editorial/sun\\_energy](http://www.3dnews.ru/editorial/sun_energy)
5. «Анализ энергетических стратегий стран ЕС и мира и роли в них ВИЭ» Гелетуха Г.Г. 2015г., [www.uabio.org/activity/uabio-analytics](http://www.uabio.org/activity/uabio-analytics)

\* \* \*



УДК. 662.765.46

БИОГАЗ ОРНОТМОЛОРУН КЛАССИФИКАЦИЯЛОО ЖАНА АЛАРДЫ КЫРГЫЗ  
РЕСПУБЛИКАСЫНДА ИШКЕ КИРГИЗҮҮНҮН АКТУАЛДУУЛУГУ  
КЛАССИФИКАЦИЯ БИОГАЗОВЫХ УСТАНОВОК И АКТУАЛЬНОСТЬ ИХ  
ВНЕДРЕНИЯ В КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКЕ CLASSIFICATION OF BIOGAS PLANTS  
AND THE RELEVANCE OF THEIR IMPLEMENTATION IN THE KYRGYZ REPUBLIC

*Токоев М.П. ОшТУ, к.т.н.  
Рыскулов И.Р., ст.преподаватель  
Дуйшебаева Э.Ы., преподаватель  
ЖАГУ ТИПФ*

*Акбарбек уулу Сагынбек ОшТУ, магистрант*

*Аннотация*- Сунушталган макалада бугүнкү күндө ата-мекендик, ошондой эле чет элде өндүрүлгөн биогаз орнотмолорунун негизги конструкциялык, технологиялык белгилери жана иштөө режимдеринин өзгөчөлүктөрүнүн классификациялык анализи берилди.

*Аннотация*- В статье приведены основные анализы конструктивных особенностей биогазовых установок и её классификация по ряду конструктивных и технологических признаков и режимов работ комплексов установок, произведенных как отечественными, так и производителями из ближнего и дальнего зарубежья.

*Abstract:* the article presents the main analysis of the design features of biogas plants and its classification according to a number of design and technological features and modes of operation of complexes of plants produced by both domestic and manufacturers from near and far abroad.

*Ачкыч сөздөр:* биогаз, биогаз орнотмосу, биореактор, метантенк, газгольдер, субстрат, биомасса, ачытуу, температура, иштөө режими, газды иштеп чыгуу.

*Ключевые слова:* биогаз, биогазовая установка, биореактор, метантенк, газгольдер, субстрат, биомасса, брожение, температура, режим работы, эксплуатация, выработка газа.

*Key words:* biogas, biogas plant, bioreactor, methane tank, gas tank, substrate, biomass, fermentation, temperature, operating mode, operation, gas production.

На сегодняшний день в Кыргызской Республике (КР) одним из важных и острых проблем является вопросы электро- и энергосбережения, а так же ее энергоэффективность, поскольку вырабатываемая электрическая энергия, а это 90% вырабатывается на гидроэлектростанциях нашей республики.

Одним из реальных возможностей для решения теплоэнергетических проблем населения, это внедрение в аграрное хозяйство Кыргызской Республики биогазовых технологий, которое позволит получить из собираемого навоза потенциальный объем ежегодного биогаза 4466 млн. м<sup>3</sup> [1, 144с].

На сегодня разработаны большое количество отличающиеся между собой разного рода конструкторско-технологическим характеристикам установки вырабатывающие биогаз.

В целом все биогазовые установки (БГУ) по основной конструкции представляют собой объемный бак с плотно закрывающейся крышкой, в которой и происходит основной анаэробный сброд отходов органической биомассы, т.е. субстрата. Большой аудитории интересующихся этой областью науки и не только, известны, что основной компонент установки это – «метантенк (реактор биогазовый)», в котором и, происходит подогрев, перемешивание и сбраживание субстрат [2, 154с]. Выработанный газ

собирается в газгольдере. Модифицированные установки могут содержать дополнительные устройства такие как, контрольно измерительные приборы и устройства автоматики.

Из проделанных анализов конструктивных особенностей биогазовых установок можно разработать её классификацию по ряду конструктивных и технологических признаков для получение конечного газообразного топлива и т.д.

В результате проделанных исследований комплексов установок, произведенных как отечественными, так и производителями из ближнего и дальнего зарубежья предлагаем следующую структурную классификацию этих установок (рис.1).

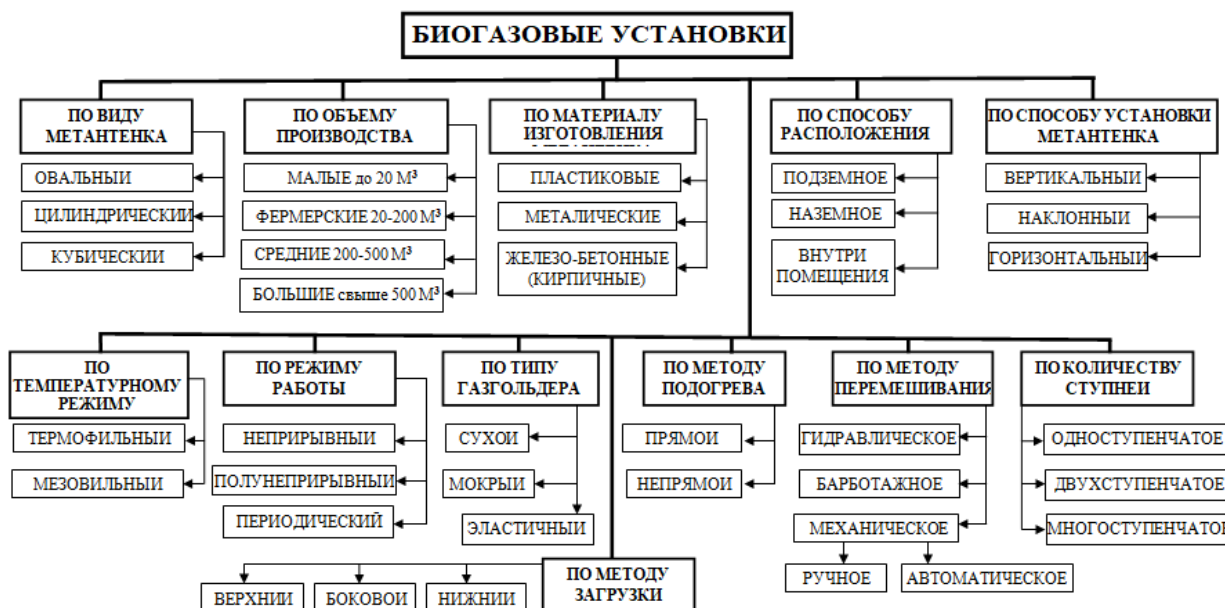


Рис.1. Структурная классификация биогазовых установок

БГУ разделяются по виду метантенка:

- метантенки *овальной* формы изготавливаются в основном малых объемов, для изготовления используют в основном такие материалы акрил (оргстекло) или стеклопластик, применения иных материалов не целесообразна, ввиду сложности изготовления и дороговизны.

- метантенки *цилиндрической* формы самый распространенный в эксплуатации. Легко доступны, изготавливаются из разных металлосодержащих материалов – стальные, железные, алюминий из строительных материалов - железобетонные, кирпичные и др., что позволяет их применять в БГУ относительно крупных объемов.

- метантенки *кубической* формы применяют в простых и небольших установках. Они изготавливаются из тех же материалов что и цилиндрические. Просты в изготовлении цена на них зависит от толщины и состава материалов.

Соответственно отсюда следует материалы изготовления метантенков: в большинстве случаев в изготовлении резервуаров для брожения субстрата используются подручные материалы, как металл или железо бетон (кирпич), а пластиковые материалы используются как сказано выше небольших объемов, что не целесообразны в производстве большого объема для производственных целей [2, 154с].

По объему производства можно подразделить на следующие:

- малые, семейного типа: для индивидуального производства и потребления объем реактора до 20 м<sup>3</sup>;
- фермерские: для фермерских и кооперативных хозяйств с поголовьем КРС не менее 100-200 голов, для производства объем реактора от 20 до 200 м<sup>3</sup>;
- средние-200 - 500 м<sup>3</sup>;
- большие - свыше 500 м<sup>3</sup>: как средние и больше объемные используется для получения газа из канализационных стоков жизнедеятельности больших городов [3, 2с].

По способу расположения биореактора различают следующие виды: подземное, наземное размещение установки, а так же строительство установки внутри помещения. Следует отметить, что на место расположение будущей БГУ влияет несколько факторов. Например, наличие свободных площадей, расположение животноводческих помещений и глубина залегания грунтовых вод.

При планировании месторасположения надо учитывать все факторы. И прежде всего удобство в эксплуатации и обслуживании. Отсюда следует разделение их по типу установке. В основном реакторы устанавливаются вертикальной установки, горизонтальной и наклонной установки. Наиболее широкое применение в Кыргызской Республике получили установки горизонтального и вертикального расположения биореактора, которые уменьшают занимаемую площадь [5, 8с].

По температурному режиму важнейшим является фактор процесса сбраживания субстрата для обеспечения наибольшего выхода биогаза при котором должна поддерживаться оптимальная для данной установки температура, эти режимы подразделяются на:

- мезофильный при температуре 30- 35<sup>0</sup> С
- термофильный при температуре 52-55<sup>0</sup> С.

Эти температурные режимы обеспечивают благоприятную среду для размножения и жизнедеятельности микрофлоры, вырабатывающие биогаз.

Для поддержания температурного режима в бродильной камере устанавливают теплообменник (водяной или электрический) для подогрева биомассы. Данный процесс осуществляют прямым и не прямым способами подвода тепла в БГУ [5, 8с].

Применение метода прямого подогрева обусловлено подачей горячей воды или пара под давлением напрямую в бродящую массу. Подогрев массы с помощью пара малоэффективен и энергозатрачен, так как требует применение парогенерирующей системы, а это в свою очередь приводит к удорожанию и сложности технической эксплуатации всей БГУ. Следует отметить, что этот метод оптимален при использовании субстрата, содержащего большое количество твердых частиц, т.к. для разбавления и достижения требуемой влажности бродильной массы необходимо определенное количество воды.

При использовании не прямого метода подвода теплоты используют теплообменный трубопровод или электрический ТЭН, которые располагают внутри бродильной камеры реактора или на его стенках. Подвод выполняют с помощью нагретой воды через теплообменный контур радиатор, где вода нагревается электричеством или самим выработанным биогазом.

По методу загрузки исходной биомассы биоэнергетические установки изготавливают с верхним типом загрузки, где субстрат загружается через верхнюю горловину емкости реактора. А так же боковой и загрузкой с нижней части реактора с помощью трубопроводов подведенных на среднюю и нижнюю внутреннюю части метантенка.

Наибольшую популярность применения в изготовлении получили метантенки с боковым входным загрузочным патрубком, который расположен в верхней части емкостного резервуара.

По режиму работы при эксплуатации и загрузке субстрата в емкость биореактора различают на:

- непрерывные системы загрузки;
- полу непрерывные системы загрузки;
- периодические системы загрузки.

В непрерывном режиме загружаемый субстрат загружается непрерывно по мере нужды или время от времени, сбрасывая при этом нужный объем переработанного шлама. Следует отметить, что при соблюдении требуемых условий производительность газа стабильны и значительно превышают по сравнению с другими системами.

Полунепрерывная система при загрузки начального сырья обусловлена промежутком времени. Особенностью является использование в этой системе не менее двух одинаковых емкостей, которые попеременно заполняются субстратом и по окончании заданного времени брожения, опустошаются.

При периодической системе загрузки используется один метантенк, который загружают до нужного объема свежим субстратом, после истечения процесса получения газа полностью сливается отработанный шлам, далее возобновляется процесс загрузки и брожения субстрата [4, 239 с].

Также БГУ различают по способу перемешивания бродильной массы:

- механическим способом, с помощью мешалок которую можно осуществлять вручную, или автоматически, путем включения электродвигателя подключенного к таймеру АСУ;

- гидравлический способ (водоструйное) – это способ перекачки субстрата из верхнего слоя реактора в нижний слой, перекачка осуществляется с помощью электронасоса;

- барботажный способ – обусловлен пропусканием выработанного биогаза через слой эффлюента с помощью дополнительного компрессора давления;

Процесс перемешивания в установке управляется вручную (путем включения и отключения двигателей или насосов) и с помощью запрограммированного автоматического контроллера для пуска насосов;

Для сбора и хранения выработанного газа в газообразном состоянии в БГУ используют – газгольдер.

Газгольдеры по конструктивно - технологическим особенностям можно подразделить на:

- мокрый газгольдер - представляет собой неподвижный резервуар, наполненный до определенного уровня водой в качестве гидрозатвора оставшееся пространство резервуара наполняется выработанным газом и откачивается с помощью компрессора;

- сухой газгольдер - представляет собой неподвижный резервуар и емкость цилиндрической формы, объем резервуара наполняется выработанным газом с помощью компрессора всасываемого из биореактора. Они различаются на два типа – сухие газгольдеры низкого и высокого давления.

-эластичные газгольдеры - представляет собой полимерный эластичный материал это эластичный резервуар, наполняющийся и откачивающийся выработанным газом с помощью компрессора; в кустарных условиях в качестве эластичного газгольдера используют автомобильные камеры.

По форме газгольдеры делятся на сферические и цилиндрические (горизонтальные и вертикальные) [4, 237с].

**Выводы:**

Из выше изложенного материала следует, что по своим эксплуатационным, конструкторским и технологическим параметрам БГУ могут отличаться друг от друга по ряду параметров таких как, например: режиму работы, по типу биореактора, по способу установки и т.д. но все эти параметры ведут к одной цели – это получения биогаза из биоотходов. Изучив конструктивно технические параметры установок мы должны стремиться к разработке установок с высоким КПД и в свою очередь простых в эксплуатации. Применение таких биогазовых установок и энергосберегающих технологий в Кыргызстане обеспечит эффективный рост производства и рентабельности аграрной продукции, улучшение экономического и социального уровня населения в целом и экономической ситуации в республике.

**Использованная литература:**

1. Кенжекулов К.Н., Рыскулов И.Р., Акбарбек у С./Анализ и исследование источников сырья первичной энергии для получения биогаза в Кыргызской Республике//Colloquium-journal №1 (25), 2019 Część 8 (Warszawa, Polska) С.143-145
2. А.И. Исманжанов. Возобновляемая энергетика: толковый словарь-справочник. Учеб. Пособие для ВУЗов/КУУ-Ош: 2015.-235с.
3. Баранова И. Г., Шадрина Е.С. / Классификационные признаки биореакторов (метантенков) для анаэробного сбраживания органических отходов./ Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев
4. Обозов А.Дж., Ботпаев Р.М. Возобновляемые источники энергии: Учеб. Пособие для ВУЗов/-Б., КГТУ, 2010.-270с.
5. Жирков В., Герман А., Матвеев Ю., Уланов М. / Основы строительства биогазовой установки для анаэробной переработки сельскохозяйственных отходов. /Караганда, 2005

Кыргыз Республикасынын Президенти тарабынан жарыяланган “ 2019-жыл-Региондорду өнүктүрүү жана санариптештирүү” жана ЖАМУнун түзүлөгдүгүнө 26 жыл толгондугуна каарата “**Региондорду өнүктүрүүдө, эсеп жүргүзүүнү санариптештирүү- учурдун талабы**”- аталыштагы Эл аралык илимий- практикалык

\* \* \*

УДК 662.997.534.

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН ТҮШТҮГҮНДӨ МӨМӨ ЖЕМИШТЕРДИ  
КУРГАТУУЧУ ОРНОТМОЛОРУНУН КОЛДОНУУНУН АКТУАЛДУУЛУГУ  
АКТУАЛЬНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СОЛНЕЧНО СУШИЛЬНЫХ УСТАНОВОК  
НА ЮГЕ КЫРГЫЗСТАНА  
ACTUALITY OF THE USE OF SOLAR DRYING INSTALLATIONS IN THE SOUTH OF  
KYRGYZSTAN

**Рыскулов И.Р.** ст.преподаватель  
**Кочконбаев С.А.** преподаватель  
**ЖАГУ ТИПФ**  
**Алманбетов А.А.** преподаватель  
**ААБИ**

*Аннотация-* Сунушталган макалада Кыргыз Республикасынын түштүгүндө күндүн жардамы менен мөмө жемештерди кургатуучу орнотмолорду колдонуунун актуалдуулугу, 2013-2017- жылдардагы Кыргызстандын түштүк чөлкөмүндөгү негизги мөмө жемештерди өндүрүү боюнча салыштырмалуу статистикалык анализи о.э, кургатууга жана сатыка чыгарууга мүнкүн болгон мөмө жемештердин сортторунун тизмеси берилди.

**Аннотация** – В данной статье приведены основные обоснование актуальности использования солнечно сушильных установок на юге Республики Кыргызстана, приведены сравнительные анализы урожайности основных плодов и ягод по трем южным областям Кыргызской Республики за 2013-2017 годы а также приведены сорта плодово - ягодных фруктов оптимальных для сушки и экспорта.

**Annotation** - This article presents the main rationale for the relevance of the use of solar-drying plants in the south of the Republic of Kyrgyzstan, provides comparative analyzes of the yields of major fruits and berries in the three southern regions of the Kyrgyz Republic for 2013-2017 as well as the fruit and berry fruit varieties that are optimal for drying and export.

**Ачык сөздөр** – күндүн жардамы менен кургатуучу орнотмолор, мөмөлөрдү кургатуу, мөмө жемши, кара өрүк, тамак аш продуктусу, экологиялык жактан таза.

**Ключевые слова** - солнечно сушильные установки, сушка фруктов, плоды, ягоды, чернослив, пищевой продукт, экологически чистый.

**Keywords** - solar drying installations, drying of fruits, fruits, berries, prunes, food product, environmentally friendly.

Проблемы энергетики во всем мире превращается в одну из глобальных проблем, требует построения современной системы использования источников энергии и поиска путей освоения возобновляемых, а также экологически чистых источников энергии.

Наряду с использованием альтернативных источников энергии в других областях, проводятся широко масштабные изыскания их использования для сушки продуктов сельского хозяйства. В данном направлении, несмотря на проведение ряда исследований, до сих пор еще существуют нерешенные проблемы. Одной из таких проблем является внедрение солнечно сушильной установки, на юге Кыргызстана предназначенной для сушки продуктов сельского хозяйства.

Преимуществом солнечной сушильной установки (ССУ) является то, что можно в кратчайший срок, используя альтернативный источник энергии для сушки продуктов сельского хозяйства, получить качественный продукт.

Сложность аккумуляции энергии в сушильных установках приводит к неудобствам при их использовании. В ССУ режим температуры-влажность зависит в основном от солнечной радиации, температуры окружающей среды, влажности воздуха, типа сушильной установки и ряда других факторов. Эти величины изменяются в течении суток. Решение выше приведенных проблем и факторов, еще более их усовершенствование ликвидирует эти технические недостатки, а через систему моделирования создается алгоритм программы, определяются пути повышения эффективности работы ССУ.

Особенно актуальнее применять сушки фруктов и ягод с использованием прямой и аккумулированной солнечной энергии на юге страны с жарким и сухим летом.

С использованием ССУ не только сохраняется полезные вещества, но и можно экономит средства и время на заготовку, ведь раньше для этой цели мы использовали каменную печь или сушили плоды на солнце [1, 5-18с]. Как известно, длительное хранение свежих фруктов и овощей невозможно. Они имеют много жидкости, поэтому быстро портятся и гниют. Сушеные фрукты и овощи имеют неограниченный срок хранения [2,12-15с].

Юг Кыргызстана, а это Ошская, Жалал-Абадская и Баткенские области богаты разными видами и сортами плодово-фруктовых культур. Каждая область славится своими уникальными фруктами, например: Баткенская область своими абрикосами (урюк), Ошская вином и яблоками, а Жалал-Абадская область - черносливом и разными сортами яблок и другими фруктами. Этому способствует прекрасный солнечный умеренный климат нашей республики.

Мелкоплодные абрикосы, высушенные целыми с косточкой - урюк. При сушке крупноплодных сортов с удаленной косточкой получают кайсу, а сушеные половинки

абрикосов без косточек называют курагой. Для сушки пригодны все виды и сорта абрикосов, даже дикорастущие, однако продукт с высокими товарными и вкусовыми качествами получают после переработки сырья из определенных местных среднеазиатских сортов. В Кыргызстане для сушки пригодны сорта Краснощекий, Фаворит, Медовый и т.п.

Сушеный виноград известен у нас под названием изюм, если он с семенами, и кишмиш, если без семян. Хотя вкус у разных сортов достаточно сильно различается, но большей популярностью пользуется именно кишмиш, ввиду того, что не имеет косточек.

Для сушки идут следующие сорта [3, 25-60с]: бессемянные – Ак-кишмиш, Кара-кишмиш, с семенами – Ангур-калян Хусайне, Вассарга, Таифи, Чилиги, Туркменский и другие. Виноград, предназначенный для сушки, собирают вполне зрелым и, если позволяют условия, оставляют его на кустах до полного увядания, потом сортируют по качеству, удаляют загнившие и поврежденные ягоды. Лучшие яблоки для сушки – кисло-сладкие на вкус и имеющие в своем составе много сухих веществ. Благодаря высокому содержанию в яблоках сухих веществ получается высокий выход сухих яблок, а кисло-сладкий вкус сообщает им хорошие вкусовые качества. Сладкие яблоки не пригодны для сушки, они получаются безвкусными. Самыми лучшими сортами яблок для сушения можно назвать: Антоновку, Апорт, Томсон, Кримстон, Голден Делюшес то есть кисловатые сорта, созревающие осенью. А вот зимние сорта для сушки используют редко, а если и используют то доброкачественную падалицу. Плоды летних сортов тоже могут дать хорошую сушку. Стоит использовать для сушки и плоды дикой лесной яблони.

Правильно высушенные доброкачественные сливы представляют собой ценный пищевой продукт. Особенно ценится чернослив. Пригодны для сушки и плоды следующих сортов слив: Венгерка итальянская, Венгерка обыкновенная, Венгерка ажанская, Голдаж чёрная и другие. Для сушки берут только зрелые сливы и лучше брать даже перезрелые, которые начинают увядать и сами с дерева.

Многие потребители и закупщики сушеного чернослива особо отмечают, что чернослив Аксыйского района Джалал-Абадской области является экологически чистой продукцией, потому что при его выращивании не применяется никаких химических препаратов и имеет большой спрос как на отечественном так и зарубежном рынке сбыта. Основным сортом является: Домашняя Венгерка.

Плодоносными ресурсами нашей страны а именно сухофруктами, практически пользуются граждане из сопредельных государств, то есть по вызреванию фруктов (чернослива, яблок, груш и т.д) приезжают закупщики из соседних стран как Таджикистан, Узбекистан, Казахстан, Китай и т.п.

И мы согласны с аграрным департаментом и руководством местных властей в том, что натуральные, сушёные экологически чистые фрукты, пользующиеся большим спросом на международном рынке, являются основным фактором развития экономики страны.

В таблице 1. приведены анализы урожайности основных плодов и ягод [4,49-51с] по трем южным областям за 2013-2017 годы. По отчетам Нац.Стат.комитета цифры указывают на то, что за последний пять лет наблюдается стабильный рост сбора урожая плодово-ягодных на территории КР.

Таблица 1

Анализ урожайности основных плодов и ягод по трем южным областям Кыргызской Республики за 2013-2017 годы

№	Область	2013	2014	2015	2016	2017
		центнер с одного гектара				
1	Ошская область	54,7	55,7	47,4	57,1	58,4
2	Джалал-Абадская область	59,9	60,7	50,4	59,9	61,2
3	Баткенская область	50,7	47,5	36,3	47,4	45,7

В таблице 2. приведены статистические анализы [5, 27-28с] сбора плодов и ягод убранные с площадей насаждения в плодоносном возрасте и валовой сбор плодов, ягод и их урожайность с одного гектара за последний уходящий год.

Таблица 2

Анализ сбора плодов и ягод за 2018 год.

№	Территория	2017г			2018г			Валовой сбор	
		Насаждения в плодоносном возрасте (Га)	Валовой сбор (тонна)	Урожайность (ц/Га)	Насаждения в плодоносном возрасте	Валовой сбор (тонна)	Урожайность (ц/Га)	%	+,-
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	Ошская область	8830	51593,0	58,4	8922	52894,1	59,3	102,5	1301,1
2	Джалал-Абадская область	7126	43620,7	61,2	7131	44989,9	62,5	103,1	1369
3	Баткенская область	12193	55694,9	45,7	12582	64345,5	51,1	115,5	8650

Как видно из таблицы 2 за последний год тоже наблюдается рост сбора урожая по всем трем областям что ещё раз подтверждает заинтересованности крестьян (дехкан) в выращивании и реализации выращенных продуктов своих трудов.

**Выводы:**

Как видно из 1и 2 таблиц, наблюдается рост сбора плодово-ягодного урожая. В виду скоропорчения плодово – ягодного урожая для реализации и экспорта готовой продукции, стоит вопрос об актуальности использования ССУ т.к. использование солнечной энергии для технологических процессов сушки позволит экономить органическое топливо (в основном древесину); ускорить и экономически более рентабельно решить продовольственную проблему, являющуюся актуальной для страны; снизить влияние отрицательного экономического фактора, связанного с активной вырубкой древесины или же сжигании угольного камня при использовании традиционных методов сушки что приводит к удорожанию готовой продукции.

Сушёные сухофрукты дольше хранятся, непривредливы при транспортировке и хранении чем не высушенные плоды фруктов. Экспорт сухофруктов в страны союзников ЕАЭС значительно увеличил бы доход в бюджет государства и значительно повлиял бы на экономическое благосостояние жителей страны.

**Использованная литература:**

1. Лыков А.В. Теория сушки [Текст] / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 472 с.
2. Филоненко Г.К. Сушка пищевых растительных материалов [Текст] / [Г.К. Филоненко и др.] – М.: Пищевая промышленность, 1971. – 300 с.
3. Мирзаев М. М., Кузнецов В. В., Бороздин В. В., Хоупов В. В. Воздушно-солнечная сушка плодов и винограда. – М.: Колос, 1965, – 255 с. Умаров Г. Г., Мирзияев Ш. М., Юсупбеков О. Н. Гелиосушка сельхозпродуктов. – Ташкент, Фан, 1994, – 152 с.



4. Национальный статистический комитет Кыргызской Республики сельское хозяйство Кыргызской Республики за 2013-2017 год Годовая публикация/ Бишкек 2018. С-89.

5. Отчет Национального статистического комитета Кыргызской Республики за 2018 год. О сборе урожая сельскохозяйственных культур в 2018 г. <http://www.stat.kg/ru/statistics/download/operational/972/>

\* \* \*

УДК 339.542.22

АКТУАЛЬНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ  
АППАРАТОВ ПРИ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОФИЛАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ЛЭП В УСЛОВИЯХ  
КЫРГЫЗСТАНА  
КЫРГЫЗСТАНДЫН БИЙИК-ТООЛУУ ШАРТТАРЫНДА АБА  
ЧУБАЛГЫЛАРЫНДАГЫ ПРОФИЛАКТИКАЛЫК ИШТЕРДИ ЖҮРГҮЗҮҮҮ УЧУРУНДА  
АРАЛЫКТАН БАШКАРУУЧУ УЧУУЧУ  
АППАРАТТАРДЫ ПАЙДАЛАНУУНУН АКТУАЛДУУЛУГУ  
THE RELEVANCE OF THE USE OF UNMANNED AERIAL VEHICLES FOR  
PREVENTATIVE MAINTENANCE OF POWER LINES IN THE CONDITION OF  
KYRGYZSTAN

**Рыскулов И.Р., ст.преподаватель  
ЖАГУ ТИПФ,  
Алманбетов А., преподаватель АББИ,  
Кочконбаев С., преподаватель АББИ**

**Аннотация:** В статье рассмотрены основные направления применения БПЛА для мониторинга линий электропередачи (ЛЭП) в высокогорных условиях нашей страны. Приведены основные виды осмотров, необходимые для проведения ремонтных работ и применения дронов для диагностики ЛЭП в энергосистеме КР.

**Аннотация:** Бул макалада биздин өлкөнүн бийик тоолуу шартында жогорку чыңалуудагы аба чубалгыларын мониторинг жүргүзүү үчүн учкучсуз учуучу аппараттарды (УУА) колдонуунун негизги багыттары көргөзүлгөн. Кыргызстандын энергосистемасындагы аба чубалгыларын кароодо жана оңдөп-түзөө иштеринде учуучу аппараттарды колдонуу берилген.

**Annotation:** The article describes the main directions of UAV application for monitoring of power lines (power lines) in the mountainous conditions of our country. The main types of inspections necessary for repair work and the use of drones for the diagnosis of power lines in the power system of the Kyrgyz Republic are given.

**Ключевые слова:** беспилотник, воздушное судно, авиационная система, мониторинг, профилактика, воздушная линия электропередач.

**Ачык сөздөр:** учкучсуз учуучу аппарат, аба кемеси, авиациялык системасы, аба чубалгылары, мониторинг, профилактика.

**Keywords:** drone, aircraft, aviation system, monitoring, prevention, air power line

История развития электрических сетей Кыргызстана тесно связана с общим развитием энергетики и электрификации республики.

С ростом мощностей электростанций, объединением их на параллельную работу, централизацией электроснабжения, росли классы напряжения линий электропередач и их протяженность.

После революции большой толчок развитию электрических сетей республики был

положен планом ГОЭЛРО, который наряду со строительством электрических станций предусматривал сооружение электрических сетей, централизацию электроснабжения и создание энергосистем.

Сети напряжением 6—10 кВ получили распространение в городских и сельских распределительных сетях, а линии электропередачи напряжением 35—110 кВ — для связи между отдельными станциями и местными энергосистемами, а также для передачи электроэнергии в отдаленные горные районы, в основном сельскохозяйственного назначения [1, 88 с.].

Линии электропередачи напряжением 220 кВ связали энергосистемы Севера и Юга Кыргызстана с соседними энергосистемами Южного Казахстана и Узбекистана, а также служат для выдачи мощности Курпсайской, Ташкумырской и Шамалдысайской ГЭС.

Линии электропередачи самого высокого класса напряжения 500 кВ введены для выдачи мощности Токтогульской ГЭС, а также ВЛ 500 кВ Датка-Кемин для создания внутреннего энерго кольца, а в будущем и каскада Камбаратинских ГЭС. Кроме того они связали энергосистемы Севера и Юга республики и является звеном кольца в объединенной энергосистеме Средней Азии и Южного Казахстана.

Большинство воздушных линий электропередач в стране является высокогорными. Например, Линия Кочкорка — Нарын является уникальной высокогорной трассой, отдельные ее опоры установлены на высоте свыше 3500 м над уровнем моря.

В 1975 году началось строительство ЛЭП-500 кВ Токтогульская ГЭС — п/ст «Фрунзенская» общей протяженностью 211 км, из которых 181 км проходит в горных условиях. На трассе установлены 682 оцинкованные металлические опоры, из них 219 анкерных, высотой до 50 м и весом до 25 тонн каждая. Линия пересекает семь перевалов, таких как Кум-Бель — 2 высотой 3470 м, Джаргарт высотой 3400 м, Кочкор-Тёбё высотой 2200 м и других, проходит по Тянь-Шаню через 35 климатических участков, на отрезке в 207 км делает 173 поворота, проходит через десятки горных рек и пропастей. На опорах линии натянут специальный провод типа АСУС-500, вес одного км которого составляет 13,5 тонны. По линии передается до 1000 тыс. кВт электрической мощности для удовлетворения быстрорастущих потребностей промышленности и сельского хозяйства Севера Кыргызстана и Казахстана. [1, 102 с.]

ЛЭП-110 кВ Гульча—Сопу — Коргон — Сары-Таш с подстанциями 110/10 кВ в с. Сопу-Коргон и 110 (35) 10 кВ в с. Сары- Таш. Эта уникальная высокогорная ЛЭП длиной 95,44 км предназначена для электроснабжения Алайской долины. Она проходит на высоте более 3000 метров. Так, например, высота перевала Талдык 3615 м, а поселок Сары- Таш расположен на высоте 3000 м. Опоры на перевальных участках ЛЭП выполнены в габаритах ЛЭП-220 кВ. [1, 99 с.].

По географическому положению наша страна расположена на северо-востоке Центральной Азии в пределах горных систем Тянь-Шаня и Памиро-Алая. Границы Кыргызстана проходят в основном по естественным рубежам — гребням высоких горных хребтов и рекам, лишь местами они опускаются на равнины Чуйской, Таласской и Ферганской долин. Территория Кыргызстана простирается с запада на восток на 900 км, с севера на юг — на 410 км. Площадь республики Кыргызстан равна 198,5 тыс.км<sup>2</sup>. Население 6 млн. человек. Наибольшая высота — 7439 м (пик Победы), наименьшая — 384 м (на юго-западе Кыргызстана). Рельеф Кыргызстана преимущественно горный. Характерной особенностью рельефа является чередование высоких хребтов и межгорных котловин, соединенных между собой узкими ущельями. [ 2 ]

По рельефу местности и климатическим особенностям Кыргызстан является типично горной страной: около 43% ее территории находится на высотах более 3000 м и

только около 15% — на высотах ниже 1500м. Средняя высота территории составляет 2750 м, минимальная — 400м (Ферганская впадина), максимальная — 7439 м (пик Победы).

Все эти природные условия создают определенные трудности при проектировании ВЛ и в дальнейшем их эксплуатацию.

Поэтому в нашей энергосистеме ВЛ зависимости от климатических, топографических и геологических условий трассы линий электропередачи могут проходить:

— по склонам гор при сильно пересеченном рельефе и покрытой лесом либо безлесной местности, а также в предгорной зоне, используемой под сельскохозяйственные посадки;

— по широкой горной долине или по горному плато со слабо пересеченным рельефом на отметках до и выше 1000 м.;

— по узким долинам и ущельям в условиях чрезвычайно стесненных, где места установки опор часто определяются углами поворота трассы или условиями доступности для сборки установки опор и фундаментов, и обслуживания сооружаемой линии, а также условиями безопасности опор от различных природных явлений;

— по горным перевалам, где возможно усиление гололедообразования и требуется изменение схемы расположения проводов.

Все эти вышеуказанные факторы приведут к повышению материальных затрат, а также большого времени при обслуживании и ремонте ВЛ. Чтобы раньше обнаружить неисправности, представляющие угрозу для нормальной эксплуатации ВЛ, а также предупредить развитие возникших неисправностей в процессе эксплуатации электромонтеры, и инженерно-технический персонал проводят осмотры воздушных линий электропередачи. Осмотры бывают **периодические и внеочередные**, осмотры **с земли и так называемые верховые осмотры**.

Осмотры пешком, а также с использованием транспортных средств, в том числе самолетов и вертолетов. Но учитывая особенности рельефа нашей страны энергокомпании производят осмотры пешком, так как большинство опор ВЛ находятся в недоступном для транспорта высоте. Это увеличивает время прохождения осмотра, потому что трассы многих ВЛ проходят по пресеченной местности. При обследовании участков ЛЭП, находящихся в труднодоступных местах, наземное обследование может затянуться на несколько дней или неделю.

Для того, чтобы снизить материальные и денежные затраты, а также уменьшить время при проведениях верховых осмотров в последнее время во всем мире начинают применяться так называемые беспилотные летающие аппараты (БПЛА) [3].

**Беспилотный летательный аппарат** (БПЛА или БЛА) — в общем случае это летательный аппарат без экипажа на борту.

Беспилотники - это эффективное средство для использования в электроэнергетике при проведении осмотров ВЛ. Они могут применяться, например, для обследования высотных и линейных сооружений [4].

Беспилотники сложно поддаются классификации, условно их можно разделить на следующие категории:

- Коммерческие – для экспресс-доставки посылок, а также для сельскохозяйственных нужд
- Военные – для наблюдения, разведки и сбрасывания бомб.
- Гражданские – они помогают контролировать территорию и обеспечивают безопасность
- Поисковики – они помогают в поиске жертв в местах, где произошли катастрофы.

Типы беспилотных летательных аппаратов

Табл.1.

	Аэростатические	Аэродинамические			Реактивные
		Гибкое крыло	Фиксированное крыло	Вращающееся крыло	
<b>безмоторные</b>	Аэростаты	Воздушные змеи и аналоги безмоторных аппаратов сверхлегкой авиации (парaplаны, дельтапланы и др.)	Планеры		
<b>моторные</b>	Дирижабли	Аналоги моторных аппаратов сверхлегкой авиации (парaplаны, дельтапланы и др.)	БПЛА самолетного типа	БПЛА вертолетного типа	Космические реактивные аппараты

По количеству двигателей коптеры (дроны) делятся на группы: трикоптеры, квадрокоптеры, гексакоптеры и октокоптеры (Рис.1.).

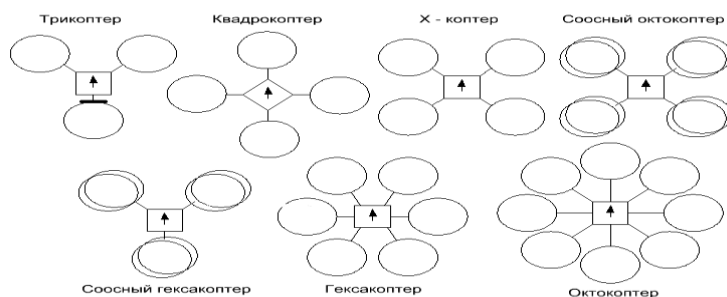


Рис 1. Типы дронов по количеству двигателей

**Трикоптеры**

Три двигателя, как правило, располагаются на концах Y-образной рамы. Это самые простые и самые дешевые мультикоптеры. На этом их достоинства заканчиваются: их полет неустойчив, вес полезной нагрузки маленький. При отказе хотя бы одного двигателя они падают на землю и разбиваются — впрочем, как и квадрокоптеры.

**Квадрокоптеры**

Четыре двигателя, которые в классическом варианте располагаются на квадратной раме. Полезная нагрузка возрастает на треть по сравнению с аналогичным трикоптером. Полет квадрокоптеров более устойчивый и длительный (за счет емкости более мощного аккумулятора или за счет более экономного режима работы моторов).

**Гексакоптеры**

Шесть двигателей закреплены на H-образной или Ж-образной раме. Конструкция достигает довольно больших размеров. Еще более увеличивается вес полезной нагрузки. Как и октокоптеры, они могут летать даже с вышедшим из строя двигателем. Из минусов — высокая цена. [4]

Перечислим основные виды работ, для которых возможно применение беспилотников:

а) плановая диагностика – облёты воздушных линий (ВЛ), наблюдение и фотографирование на малых и средних высотах, инспекция ВЛ и охранной зоны, выявление дефектов и нарушений, определение пространственных (3D) нарушений габаритов просеки и проводов;

б) аварийно-восстановительные работы – облёт ВЛ на средних высотах при различных метеоусловиях, в ночное время с использованием фотовспышки или тепловизора;

в) картографические работы – создание цифровых топографических и кадастровых планов, трёхмерных моделей местности и линий электропередачи, сопровождение работ по строительству и реконструкции ВЛ (Рис.2.) [3].

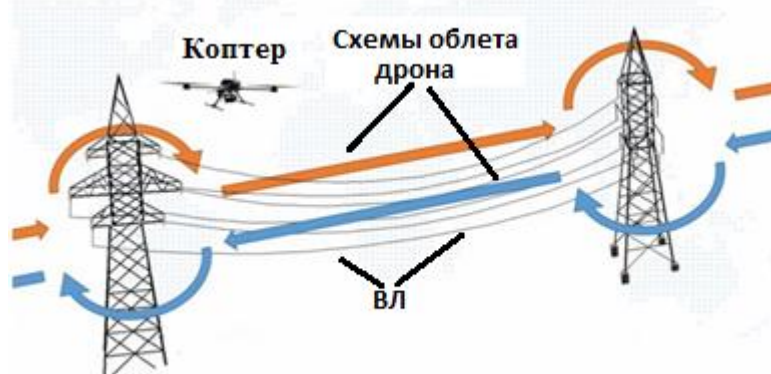


Рис. 2. Схема мониторинга ЛЭП с помощью мультироторного копитера (дрона)

При проведении аэрофотосъёмочных работ можно получить снимки высокого разрешения и по ним проанализировать достаточно большое число дефектов, таких как (Рис.3.):

**дефекты опор:**

отсутствие, отрыв, деформация элементов металлических опор; выкрошивание бетона, деформация железобетонных опор; отклонение опор от вертикали; разворот, деформация траверсов на железобетонных опорах; отсутствие натяжения внутренних стяжек и тросовых растяжек; падение, повреждение опор;

**дефекты провода, линейной и сцепной арматуры:**

разрушение элементов стеклянных и фарфоровых изоляторов; отсутствие гасителей вибрации, отсутствие грузов, потеря работоспособности несущего тросика, смещение виброгасителей вдоль проводов относительно проектного положения; отсутствие и неправильное расположение соединителей проводов; изломы, отрывы лучей дистанционных распорок между проводами расщеплённой фазы; обрыв проводов;

**дефекты на трассе:**

наличие опасной для эксплуатации ВЛ растительности; падение деревьев на провода и опоры; наличие древесно-кустарниковой растительности (ДКР) в охранной зоне; наличие строений и прочих объектов в охранной зоне; пересечение с природными и антропогенными объектами; опасные явления (проседание грунта, подтопление и др.) [3].



Рис.3. Обнаружение дефектов на ВЛ при помощи беспилотника.

Ниже перечислены преимущества использования БПЛА в сфере электроэнергетики:

**Оперативность:** БПЛА позволяет вести обслуживания со скоростью в десятки километров в час или, наоборот, в режиме зависания у необходимой точки. Это обеспечивает выигрыш в скорости контроля по сравнению с традиционным способом обследования с земли.

**Объективность:** снижается роль человеческого фактора. Остаются документы обследования в виде фото и видеоматериалов.

**Качество:** высокое разрешение получаемых материалов, их геопривязка.

**Безопасность:** использование беспилотника вместо сотрудников снижает вероятность несчастных случаев. Особенно по сравнению с использованием промышленных альпинистов.

**Экономический эффект:** снижение материальных затрат, таких как: ГСМ, моторесурсов и запчастей транспорта, командировочные расходы на бригаду работников и экономия времени для осмотра.

Учитывая, что большинство воздушных линий электропередач нашей энергосистемы построены в 50-60-годах прошлого века, требуется вложения огромных денежных средств для поддержания этих ВЛ в состоянии эксплуатационной готовности. Для распределительных компаний снижения расходов на ремонт и профилактику ВЛ является одним из основных проблем. Один из таких мер для экономии средств является применения беспилотных летательных аппаратов при профилактических работах ВЛ. Внедрение БПЛА для мониторинга и профилактики воздушных линий электропередач в нашей стране для повышения качества ремонтных работ и уменьшений аварийных отключений ВЛ в настоящее время для нашей страны жизненно необходимо [5].

#### Выводы:

Применение БПЛА при мониторинге состояния воздушных линий электропередачи в энергокомпании может дать экономию средств для ремонта и профилактических работ. В труднодоступных районах где невозможно применить транспортные средства беспилотники является наиболее оптимальным вариантом проведения осмотров электрооборудования. Использование БПЛА позволяет существенно увеличить оперативность мониторинга и сократить сроки проведения обследований и ремонтно-профилактических работ. В зависимости от комплектации сенсоров на БПЛА и специализированного программного обеспечения возможно одновременное получение существенно расширенного объема информации о состоянии объектов электроэнергетики и параметров и рисков в пределах охранных зон.

#### Список литературы:

1. Ж.Т. Тулебердиев, К.Р. Рахимов, Ю.П. Беляков. Развитие энергетики Кыргызстана. Бишкек 1997.
2. <http://rus.gateway.kg/geografiya-kyrgyzstana/> Kyrgyzstan Review Информационно-познавательный портал о Кыргызстане
3. А. Валиев. Эксплуатация беспилотников в электросетевом комплексе России.// «Электроэнергия», № 6, 2011 г.
4. Сайт компании Геоскан - <https://www.geoscan.aero/>
5. Сайт компании Финко (беспилотники Суперкам) - <http://unmanned.ru/>

\* \* \*