УДК 517. 968.22

О РЕШЕНИИ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ IРОДА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ
ABOUN THE OF UNCLFSSIAL INTEGRAL EQUATION OF FIRST ORDER IN THE SPACE OF CONTNIONSE FUNCTIONS

Асанов А. – (по паспорту отчества не имеет)- д.ф.-м.н. профессор, университета Кыргыз-Турк "Манас", Естественно научный факультет, з ав.отделение Математика.
Чоюбеков С.М. –старший преподаватель кафедры «математический методы в экономике», Ошского государственного университета, факультета «Бизнеса и менеджмента»

Аннотация: *Модели многих задачи прикладного характера сводятся к уравнением, среди которых неклассические уравнения представляют особые интересы и мало изучены. В данной работе в предположении* $\alpha(t_0)=t_0$, *следуя по методу предположенному М. Иманалиевым и А. Асановым строится регуляризация и доказывается единственность решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода в различных функциональных пространствах.*

Определены достаточные условия обеспечивающие единственность решения в частноти доказывается:

Теорема. *Пусть выполняются условия*

1) $\alpha(t)\in C^1[t_0;T],\ \alpha'(t)>0$ *при почти всех* $t\in[t_0;T]$;

2) $K(t,t)\in C[t_0;T]$ *и* $K(s,s)\ge m>0$ *при всех* $s\in[t_0;T]$;

3) Функция $K(t,s)$ *удовлетворяет условию Липщица по* t, *т.е.* $\forall t,\tau\in[t_0;T](t>\tau)$ *и при всех* $(t,s),(\tau,s)\in G$ $\left|K(t,s)-K(\tau,s)\right|\le L(t-\tau)$ $L>0$ *- const.*

И $\gamma_0 b_0<1$, *Тогда решение уравнения неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода в пространстве* $C[t_0,T]$ *единственно.*

Построен регулирующее уравнение по Лаврентьеву для решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода.

Annotaion: *Models of many applied problems are reduced to equation, among which unclassical equations present some particular interests and they are not investigated all. By following the methods, suggested byM. Imanaliev and A. Asanov, in the given work in the given work in the case* $\alpha(t_0)=t_0$, *the regularity of the solution of unclassical integral equation of Volter's first order is built fnd uniqueness of this solution is proved.*

Sufficient conditions which provide the uniqueness of solution are defined and proved in particular:

Theorem: *Let*

1) $\alpha(t)\in C^1[t_0;T],\ \alpha'(t)>0$ *nearly for all* $t\in[t_0;T]$;

2) $K(t,t)\in C[t_0;T]$ *and* $K(s,s)\ge m>0$ *for all* $s\in[t_0;T]$;

3) The function $K(t,s)$ *satisfies the condition Lipshica on* t, $\forall t,\tau \in [t_0;T](t>\tau)$ $(t>\tau)$ *and for all* $(t,s),(\tau,s)\in G$ $|K(t,s)-K(\tau,s)| \le L(t-\tau)$ $L>0$ *- const. and* $\gamma_0 b_0 < 1,$ *then the solutionof unclassical equation of Volter's first order in the space* $C[t_0,T]$ *is unique.*

The regulative equation of Lavrentyev for solution unclassical integral equation of Volter's first order was built.

Ключевые слова: *Интегрального уравнения, Обобщенная формула Дирихле, единственность, резольвента, регуляризация, функциональное пространство.*

Key words: *integral equation, generalized formula of Dirixle, uniqueness, resolvent, regularity, functional space.*

Актуалность работы: обусловлена тем, что мнение задачи прикладного характера сводятся к интегральным уравнениям, среди которых неклассические уравнения представляют особые интересы и мало изучены.

Цель работы: исследовать решение неклассического уравнения первого рода на единственность и определить условия регуляризации уравнения.

Методы исследования: метод регуляризации по Лаврентьеву предложеный М. Иманалиевым и А. Асановым для уравнений I рода, для установления единственности применён метод определяющий существование единственного тривиального решения для однородных уравнений.

Результаты: определены достаточные условия обеспечивающие единственность решения в пространстве непрерывных функции;

Построен регуляризирующее уравнение по Лаврентьеву для неклассического интегрального уравнения Вольтера I рода.

Расмотрим интегральное *уравнение*

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t) \quad t\in[t_0;T] \tag{1}$$

где $\alpha(t)\in C[t_0,T],$ $\alpha(t_0)=t_0,$ $\alpha(t)\le t$ при всех $t\in C[t_0;T],$ $K(t,s)$ и $f(t)$ известные фунции в области $G=\{(t,s):\ t_0\le t\le T,\ \ \alpha(t)\le s\le t\}$ и на отрезке $[t_0;T]$ соответственно $f(t_0)=0.$

Уравнение вида (1) возникает при решении многих прикладных задач [2], [4]. Однако, уравнения такого типа значительно менее исследованы, чем классические уравнения Вольтерра I рода.

В данной работе в предположении $\alpha(t_0)=t_0,$ следуя по методу предположенному М. Иманалиевым и А. Асановым [1] строится регуляризация и доказывается единственность решения уравнения (1) в различных функциональных пространствах.

Следуя по методике предложенный в [1]-[4] и развитат в [5] строим регуляризация уравнение для (1).

Лемма 1. (Обобщенная формула Дирихле). Пусть $\alpha(t)\in C[t_0;T]$ $\alpha(t_0)=t_0,$ $\alpha(t)-$строго возрастающая функция на $[t_0;T],$ $\alpha(t)\le t$ при всех $t\in C[t_0,T]$ $F(t,s)\in C(G),$ $G=\{(t,s):\ t_0\le t\le T,\ \ \alpha(t)\le s\le t\}.$ Тогда для любого $t\in C[t_0,T]$.

$$\int_{t_0}^{t}[\int_{\alpha(s)}^{s}F(s,\tau)d\tau]ds=\int_{t_0}^{\alpha(t)}[\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}F(s,\tau)ds]d\tau+\int_{\alpha(t)}^{t}[\int_{\tau}^{t}F(s,\tau)ds]d\tau,$$

$$\int_{t_0}^{t}[\int_{t_0}^{\alpha(s)}F(s,\tau)d\tau]ds=\int_{t_0}^{\alpha(t)}[\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}F(s,\tau)ds]d\tau$$ где $\alpha^{-1}(\tau)-$обратная функция к $\alpha(t)$.

Доказательство. Доказательство вытекает из следующего графика:

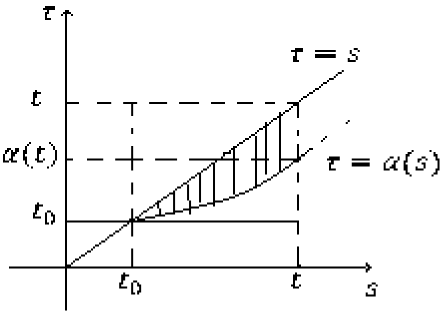

Рис.1.

Предполагаем выполнение следующих условий

$1^0\,\alpha(t)\in C^1[t_0;T],\ \alpha'(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0;T]$;

$2^0\,K(t,t)\in C[t_0;T]$ и $K(s,s)\ge m>0$ при всех $s\in[t_0;T]$;

3^0 Функция $K(t,s)$ удовлетворяет условию Липщица по $t,$ т.е. $\forall t,\tau\in[t_0;T](t>\tau)$ и при всех $(t,s),(\tau,s)\in G$ $\left|K(t,s)-K(\tau,s)\right|\le L(t-\tau)$ $L\ >\ 0$ - const.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)v(s,\varepsilon)ds=f(t)+\varepsilon u(t_0),\quad t\in[t_0;T];\tag{2}$$

где, $u(t)$ - решение уравнения (1). Его решение будем искать в виде

$$v(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon)\tag{3}$$

Тогда из (2) имеем $\varepsilon\xi(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds=-\varepsilon(u(t)-u(t_0))\cdot$ Последнее перепишем в следующем виде

$$\xi(t)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds=\frac{(-1)}{\varepsilon}\int_{\alpha(t)}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds-(u(t)-u(t_0))\tag{4}$$

Используя резольвенту ядра $\left(-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)\right)$, из (4) получим

$$\xi(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(t)}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds-(u(t)-u(t_0))$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\{\int\limits_{\alpha(s)}^{s}[K(s,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau-\int\limits_{t_0}^{\alpha(s)}K(\tau,\tau)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+$$

$$+\varepsilon(u(s)-u(t_0))\}ds.$$

Из последнего переходим

$$\xi(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(t)}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds-(u(t)-u(t_0))+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\times$$

$$[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\alpha(s)}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(s)-u(t_0)]ds; \qquad (5)$$

Применим обобщенную формулу Дирихле и преобразуем двойные интегралы в (5):

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}[\int\limits_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\times$$

$$\times(K(s,\tau)-K(t,\tau))ds]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\alpha(t)}^{t}[\int\limits_{\tau}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}(K(s,\tau)-K(t,\tau))ds]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau. \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\alpha(s)}^{s}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(\tau,\tau)d\tau}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\}\times$$

$$\times[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(\tau)}^{t}[1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau. \qquad (7)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\alpha(s)}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)]\xi(\tau,\varepsilon)d\tau ds=\frac{-1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}K(\tau,\tau)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(s,s)ds}\xi(\tau,\varepsilon)d\tau; \qquad (8)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(s)-u(t_0)]ds=u(t)-u(t_0)-[u(t)-u(t_0)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,s)ds}-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]ds; \qquad (9)$$

В силу (6)-(9) уравнение (5) примет вид

$$\xi(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}\{K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(s,s)ds}+\int\limits_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds+[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(\tau,\tau)d\tau}-$$

$$-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\}\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(t)}^{t}\{-[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^\tau K(\tau,\tau)d\tau}\times$$

$$\times[K(s,\tau)-K(t,\tau)]ds+[1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}][K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]\}\xi(\tau,\varepsilon)d\tau-[u(t)-u(t_0)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(\tau,\tau)d\tau}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]ds. \tag{10}$$

Введем обозначения

$$H_0(t,\tau,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}K(\alpha^{-1}(\tau),\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(s,s)ds}, \tag{11}$$

$$H_1(t,\tau,\varepsilon)=-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]+\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}\frac{1}{\varepsilon^2}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(s,\tau)-$$

$$-K(t,\tau)]ds+\frac{1}{\varepsilon}[K(t,\tau)-K(\alpha^{-1}(\tau),\tau)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(\tau,\tau)d\tau}, \tag{12}$$

$$H_2(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds}[K(t,\tau)-K(\tau,\tau)]-\int_\tau^t K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}[K(t,\tau)-K(s,\tau)]ds, \tag{13}$$

$$U(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}[u(t)-u(t_0)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(\tau,\tau)d\tau}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]ds. \tag{14}$$

Учитывая обозначения (11)-(14) уравнение (10) запишем в следующем виде

$$\xi(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{\alpha(t)}H_0(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\int_{t_0}^{\alpha(t)}H_1(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\int_{\alpha(t)}^{t}H_2(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+U(t,\varepsilon),\ t\in[t_0,T]. \tag{15}$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1^0- 3^0 и функции $H_0(t,\tau,\varepsilon)$, $H_1(t,\tau,\varepsilon)$ и $H_2(t,\tau,\varepsilon)$ определены формулами (11), (12) и (13) соответственно. Тогда справедливы следующие оценки:

1) $$\int_{t_0}^{\alpha(t)}|H_0(t,\tau,\varepsilon)|d\tau\le\gamma_0,\quad t\in[t_0,T]; \tag{16}$$

где $\gamma_0=\sup\limits_{v\in[t_0,T]}\dfrac{|K(v,\alpha(v)|\alpha'(v)}{|K(v,v)|}$;

2) $$|H_1(t,\tau,\varepsilon)|\le\frac{L}{m}(2e^{-1}+1),\quad (t,\tau)\in G_1=\{(t,\tau):t_0\le t\le T,t_0\le\tau\le\alpha(t)\}; \tag{17}$$

3) $$|H_2(t,\tau,\varepsilon)|\le\frac{L}{m},\quad (t,\tau)\in G_2=\{(t,\tau):t_0\le t\le T,\alpha(t)\le\tau\le t\}; \tag{18}$$

Доказательство. 1) Учитывая (11) и сделав подстановку $v=\alpha^{-1}(\tau)$, имеем

$$\int_{t_0}^{\alpha(t)}|H_0(t,\tau,\varepsilon)|d\tau\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\alpha(t)}|K(\alpha^{-1}(\tau),\tau,)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(s,s)ds}d\tau=\int_{t_0}^{t}\frac{|K(v,\alpha(v))|K(v,v)}{K(v,v)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_v^t K(s,s)ds}\times$$

$$\times\frac{1}{\varepsilon}\alpha'(v)dv\le\gamma_0[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_v^t K(s,s)ds}]\Bigg|_{v=t_0}^{v=t}\le\gamma_0,\ t\in[t_0,T],\quad\varepsilon>0$$

2) Учитывая условия 2^0 и 3^0, из (12) получим

$$|H_1(t,\tau,\varepsilon)|\le e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds}\frac{1}{\varepsilon}L(t-\tau)+\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)}\frac{L}{\varepsilon^2}(t-s)K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}ds+\frac{L}{\varepsilon}(t-\alpha^{-1}(\tau))e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K(s,s)ds}$$

Отсюда, интегрируя по частям, имеем

$$|H_1(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{L}{\varepsilon}(t-\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau} + \frac{L}{\varepsilon}(t-\alpha^{-1}(\tau))e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K(\tau,\tau)d\tau} + \left.\frac{L(t-s)e^{\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}}{\varepsilon}\right|_{s=\tau}^{s=\alpha^{-1}(\tau)} +$$

$$+\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} \frac{L}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} \le \frac{2L}{m}\sup_{h>0}(he^{-h}) + \int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} \frac{L}{\varepsilon}e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-s)}ds \le \frac{L}{m}(2e^{-1}+1),\ (t,\tau)\in G_1.$$

3) Учитывая условия 2^0 и 3^0, интегрируя по частям, из (13) имеем

$$|H_2(t,\tau,\varepsilon)| \le \frac{L}{\varepsilon}(t-\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds} + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^t L(t-s)K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} = \frac{L}{m}(t-\tau)e^{-1\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(s,s)ds} +$$

$$+\left.\frac{L}{\varepsilon}(t-s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\right|_{s=\tau}^{s=t} + \frac{L}{\varepsilon}\int_\tau^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}ds \le \frac{L}{m},\ (t,\tau)\in G_2.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть выполняются условия 2^0 и $U(t,\varepsilon)$ определена по формуле (14). Тогда:

1) если $u(t)\in C[t_0,T]$ то $\|U(t,\varepsilon)\|_c = \sup\limits_{t\in[t_0,T]}|U(t,\varepsilon)| \le 2\|u(t)\|_c e^{-\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^\beta),$ (19)

$0<\beta<1,$

где $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{|t-s|\le\varepsilon^\beta}|u(t)-u(s)|;$

2) если $u(t)\in C^\gamma[t_0,T],\ 0<\gamma<1,$ то $\|U(t,\varepsilon)\|_c = \sup\limits_{t\in[t_0,T]}|U(t,\varepsilon)| \le \gamma,$ (20)

где $c_\gamma = \sup\limits_{t,s\in[t,T]}\frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^\gamma},\ c_0 = \gamma\int_0^\infty e^{-mv}v^{\gamma-1}dv.$

Доказательство:

1) Пусть $t_0 \le t \le t_0+\varepsilon^\beta,\ 0<\beta<1.$ Тогда из (14) имеем

$$|U(t,\varepsilon)| \le \omega_u(\varepsilon^\beta)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_0}^t K(\tau,\tau)d\tau} + \omega_u(\varepsilon^\beta)\int_\tau^t K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}ds = \omega_u(\varepsilon^\beta) \quad (21)$$

Если $t_0+\varepsilon^\beta \le t \le T,$ то

$$|U(t,\varepsilon)| \le 2\|u(t)\|_c e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_0}^t K(s,s)ds} + \int_{t_0}^{t-\varepsilon^\beta}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}2\|u(t)\|_c ds + \int_{t-\varepsilon^\beta}^t \frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} \times$$

$$\times\omega_u(\varepsilon^\beta)ds \le 2\|u(t)\|_c e^{-\frac{m}{\varepsilon}\varepsilon^\beta} + \omega_u(\varepsilon^\beta) = 2\|u(t)\|_c e^{-\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^\beta). \quad (22)$$

Из оценки (21) и (22) вытекает оценка (19).

2) Из (14) имеем

$$|U(t,\varepsilon)| \le c_\gamma(t-t_0)^\gamma e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_0}^t K(s,s)ds} + c_\gamma\int_{t_0}^t (t-s)^\gamma e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)ds = c_0c_\gamma\varepsilon^\gamma,\ t\in[t_0,T]. \quad (23)$$

Из (23) следует оценка (20). Лемма 3 доказана.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1^0-3^0 и $\gamma_0 b_0 < 1,$ где $\gamma_0 = \sup_{v\in[t_0,T]} \frac{|K(v,\alpha(v)|\alpha'(v)}{|K(v,v)|}$, $b_0 = \exp[\frac{L}{m}(2e^{-1}+1)(T-t_0)].$ Тогда: 1) если уравнение (1) имеет решение $u(t)\in C[t_0;T],$ то решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$ сходится по норме $C[t_0;T]$ к решению $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_c \le \frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0}[2\|u(t)\|_c e^{-\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^{\beta})]. \quad (24)$$

где $\omega_u(\delta) = \sup_{|t-s|\le\delta} |u(t)-u(s)|;$

2) если уравнение (1) имеет решение $u(t)\in C^{\gamma}[t_0;T],\ 0<\gamma\le 1,$ то решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$ сходится по норме $C[t_0;T]$ к решению $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_c \le \frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0} c_0 c_\gamma \varepsilon^{\gamma}, \quad (25)$$

где $c_\gamma = \sup_{(t,s)\in[t_0,T]} \frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^{\gamma}};\ c_0 = \gamma\int_0^{\infty} e^{-m\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau.$

Доказательство. В силу оценки (16), (17), (18) из уравнения (15), имеем

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \gamma_0\|\xi(t,\varepsilon)\|_c + \int_{t_0}^{\alpha(t)} \frac{L}{m}(2e^{-1}+1)|\xi(s,\varepsilon)|ds + \int_{\alpha(t)}^{t} \frac{L}{m}|\xi(s,\varepsilon)|ds + |U(t,\varepsilon)|,$$

$$t\in[t_0,T].$$

Отсюда имеем

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \frac{L}{m}(2e^{-1}+1)\int_{t_0}^{t}|\xi(s,\varepsilon)|ds + \gamma_0\|\xi(t,\varepsilon)\|_c + \|U(t,\varepsilon)\|_c,\ t\in[t_0,T]. \quad (26)$$

Применяя неравенство Гроноулла-Беллмана, из (26) имеем

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_c \le [\gamma_0\|\xi(t,\varepsilon)\|_c + \|U(t,\varepsilon)\|_c]e^{\frac{L}{em}(2e^{-1}+1)(T-t_0}$$

Отсюда вытекает

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_c \le \frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0}\|U(t,\varepsilon)\|_c. \quad (27)$$

В силу оценки (19) и (20), из (27) получим требуемые оценки (24) и (25). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1^0-3^0и $\gamma_0 b_0 < 1,$ где γ_0 и b_0 - определены в теореме 1. Тогда решение уравнения (1) в пространстве $C[t_0,T]$ единственно.

Доказательство. Пусть $u(t)$ - ненулевое решение уравнения (1) в $C[t_0,T]$ при $f(t)=0,\ \forall t\in[t_0,T].$ Тогда из (1) имеем $\int_{\alpha(t)}^{t} K(s,s)u(s)ds + \int_{\alpha(t)}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]u(s)ds = 0,$ $t\in[t_0,T].$

Далее $\left|\int\limits_{\alpha(t)}^{t} K(s,s)u(s)ds\right| \le \int\limits_{\alpha(t)}^{t} |K(t,s)-K(s,s)\|u(s)|ds,$ $t\in[t_0,T].$ Отсюда к левой части применяя теорему о среднем, а к правой части условие теоремы 2, имеем

$$\left|K(s^*,s^*)u(s^*)[t-\alpha(t)]\right| \le \int\limits_{\alpha(t)}^{t} L(t,s)\|u(t)\|_c\, ds = L\|u(t)\|_c[-\frac{(t-s)^2}{2}]\Big|_{s=\alpha(t)}^{s=t} = \frac{1}{2}L\|u(t)\|_c(t-\alpha(t))^2,\ s^*\in[\alpha(t),t]. \quad (28)$$

Далее, из (28) получим $\left|K(s^*,s^*)u(s^*)\right| \le \frac{1}{2}\|u(t)\|_c(t-\alpha(t),\ s^*\in[\alpha(t),t].$

Отсюда переходя к пределу при $t\to t_0$ имеем $u(t_0)=0.$ Тогда $v(t,\boldsymbol{\varepsilon})=0$ при всех $t\in[t_0,T],\ \boldsymbol{\varepsilon}>0$ и из оценки (24) получим $\|u(t)\|_c \le \frac{b_0}{1-\gamma_0 b_0}[\|2u(t)\|_c e^{\frac{m}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega(\varepsilon^{\beta})].$

Из последней оценки следует, что $u(t)=0$ при всех $t\in[t_0,T].$ Теорема 2 доказана.

Список использованной литературы:

1. Apartsyn A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First King. Utrech: VSP, 2003. 168 p.
2. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Inverse Problems. Utrech: VSP, 1998. 226 p.
3. Bukhgeim A.M. Volterra Equations and and Inverse Problems. Utrech: VSP, 1999. 204 p.
4. Апарцин А.С. Неклассические упавнения Вольтера I рода. Теория и численные методы.
5. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука 198-350 с.
6. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтера первого рода // ДАН 1991. Т. 317. № 1. С. 32-35.
7. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // ДАН 1989. Т. 309. № 5. С. 1052-1055.
8. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений третьего рода // ДАН 2007. Т. 415. № 1. С. 14-17.
9. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений первого рода //Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям.-Фрунзе: Илим 1988,-вып.21-С.3-38.
10. Лавреньтев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода //ДАН. 1959. Т. 127. № 1. С. 31-33.
11. Imanaliev V.I., Asanov A., Asanov R.A. Classic of Systems of Linear Fuedholm Integral Equetions of Third Rind. -2011.-Vol. 83, № 2. –Pp. 227-231.
12. Асанов А., Бекешов Т.О., Чоюбеков С.М.Регуляризация и единственность решения неклассического интегрального уравнения со условиям Липщица. Кырг.НУ-Вестник 2011. стр.108-111. г.Бишкек.
13. Апарцин А.С. О численном решении некоторых неклассических уравнений Вольтерра I рода// Оптимизация численных методов. Тез. докл. Междунар. конф., посвященной 90-летию 27. Апарцин А.С. О решении многомерных уравнений Вольтерра I рода, возникающих в задаче идентификации нелинейных динамических систем // Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1992. - С. 219-222.
14. Апарцин А.С. Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (скалярный случай). Иркутск: СЭИ СО РАН, 1995. - 30 с. - Препринт9.

15. Апарцин А.С. Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (векторный случай). Иркутск: СЭИ СО РАН, 1996. - 57 с. - Препринт8.
16. Апарцин А.С., Маркова Е.В. Неклассические уравнения Вольтерра I рода и их приложения//Тр. Междунар. конф. Математика в приложениях", посвященной 75-летию С.К. Годунова. Новосибирск, ИМ СО РАН. -25.08.99 (в печати).
17. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск.: Наука. Сиб. отд-ние, 1999. - 193 с.
18. 100. Маркова Е.В. Особенности численного решения интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменным нижним пределом// Материалы XXVIII конф. научной молодежи. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 1999. - С. 144-152.
19. Слюсарь Н.С. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода регуляризованным методом квадратур. Дипломная работа. Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 1983. - 38 с.
20. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода: теория и численные методы / А.С. Апарцин. – Новосибирск: Наука, 1999. – 193 с.
21. Маркова Е.В. Численные методы решения неклассических линейных уравнений Вольтерра I рода и их приложения: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Е. В. Маркова. – Иркутск, 1999. – 100 с.
22. Сидоров Д.Н. О разрешимости уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами в классе обобщенных функций / Д. Н. Сидоров // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — Т. 5, № 1. – С. 80–95.