

УДК 517.928

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ЛИНИЯХ  
СИНГУЛЯРДУУ ДҮҮЛҮККӨН КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК  
ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫН СЫЗЫКТАРДА КӨРСӨТҮҮ  
REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED ORDINARY  
DIFFERENTIAL EQUATIONS ON LINES

Мурзабаева А.Б. – ОшТУ, г.Ош

**Аннотация:** Приведены различные определения кривых используемые в математике и наиболее близко связанные с теорией множеств. Используя кривую Жордана состоящих из нескольких спрямляемых простых дуг решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений представлены в каждом из этих частей.

**Аннотация:** Көптүктөр теориясы менен жакын байланышта болгон жана математикада колдонулуучу ийрилдердин ар түрдүү аныктамалары келтирилген. Бир нече түздөөлүүчү жаалардан түзүлгөн Жордандын ийрисин колдонуу менен сингулярдуу козголгон кадимки дифференциалдык тендемелердин чечимдери бөлүкчө жааларда көрсөтүлгөн.

**Annotation:** Various definitions of curves used in mathematics and most closely related to set theory are given. Using the Jordan curve consisting of several rectifiable simple arcs, solutions of singularly perturbed ordinary differential equations are represented in each of these parts.

**Ключевые слова:** плоская кривая, кривые Жордана, плоское множество, связное компактное множество, параметры кривых.

**Ачык сөздөр:** жалпак ийри, Жордандын ийрилери, жалпак көптүк, байламталуу компактуу көптүк, ийрилдердин параметрлери.

**Keywords:** flat curve, Jordan curves, flat set, connected compact set, curve parameters.

### Вводная часть

Понятие непрерывной кривой на плоскости является одним из понятий, интуитивно кажущихся простыми, но фактически очень сложно определяемых. В разное время различные математики по разному определяли непрерывную кривую.

Приведем следующие определения, близко связанные с теорией множеств.

**Определение (по Жордану).** Плоская кривая есть множество точек плоскости, координаты которых определяются двумя уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  непрерывные функции переменного  $t$ , определенные на сегменте  $[t_0, T]$ .

**Определение (по Кантору).** Кривой на плоскости называется всякое связное, компактное множество  $\mathcal{P}$  точек плоскости, не содержащее в себе никакой внутренней точки.

**Определение (по Урысону).** Кривой называется одномерное связное и одновременно компактное множество.

Плоское множество (множество точек  $R^2$ ) называется связным, если при всяком разбиении его на два под множества по крайней мере в одном из них найдется предельная точка другого.

Непустое множества  $A$  называется компактным, если любое его бесконечное подмножество имеет предельную точку, принадлежащую  $A$ .

Связное, компактное множество  $B$  называется одномерным, если для любого  $\varepsilon$  и каждой его точки найдется окрестность этой точки диаметра, меньшего  $\varepsilon$ , такая, что в пересечении с множеством  $B$  граница этой окрестности не содержит никакого связного, компактного подмножества, состоящего более чем из одной точки.

**Определение.** Пусть дана кривая Жордана:  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ . Тогда, если для любых двух различных значений  $t_1$  и  $t_2$  соответствующие им точки плоскости  $A_1(\varphi(t_1), \psi(t_1))$ ,  $A_2(\varphi(t_2), \psi(t_2))$  различны, кривая называется кривой Жордана без кратных точек или простой дугой.

Далее будут использованы спрямляемые кривые Жордана.

Дуга, обладающая длиной, называется спрямляемой.

Пусть рассматривается уравнение первого порядка

$$\varepsilon z'(t, \varepsilon) = a(t)z(t, \varepsilon) + f(t, z(t, \varepsilon), \varepsilon) \quad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0, \varepsilon) = z_0, \quad (2)$$

где  $t \in \Delta \subset C$  и  $t \in \Delta$  её внутренняя точка.

Пусть выполняются условия

U 1.  $a(t) \in Q(\Delta)$ .

U 2.  $f(t, z, \varepsilon) \in Q(H)$ , где  $H$  – некоторое множество переменных  $(t, z)$  и  $f(t, z, \varepsilon)$  непрерывна по  $\varepsilon$ .

Задачу (1)-(2) заменим следующим интегральным уравнением

$$z(t, \varepsilon) = z^0 \exp \frac{A(t)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t f(\tau, z(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (3)$$

где  $A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$ .

Для интеграла, в (3), можно выбрать произвольный путь интегрирования соединяющий точки  $t_0$  и  $t$ , причем весь путь интегрирования должна принадлежать области  $\Delta$ .

Пусть путь интегрирования состоит из нескольких кривых типа Жордана (спрямляемых простых дуг):  $(p_1), (p_2), \dots, (p_n)$  последовательно соединяющие точки  $t_0, T_1, T_2, \dots, T_{n-1} = t$ .

Будем считать, что  $(p_k)$  представляется параметрически в виде

$t_1 = t_1(s_k), t_2 = t_2(s_k)$ , где  $s_k$  длина кривой  $p_k$  отсчитываемая от точки  $T_k$  до  $T \in p_k$ , причем  $0 \leq s_k \leq s_{k0}$ .

Обозначим  $A(t) = A(t(s_k)) \equiv A(s_k)$ ,  $z(t(s_k), \varepsilon) \equiv z(s_k, \varepsilon)$ .

Рассмотрим следующие случаи:

1.  $t \in (p_1)$ . Тогда (3) можно представить в виде

$$z(s_1, \varepsilon) = z^0 \exp \frac{A(s_1)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_1} f_1(\tilde{s}_1, z(\tilde{s}_1, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_1) - A(\tilde{s}_1)}{\varepsilon} d\tilde{s}_1, \quad (4)$$

где

$$f_1(\tilde{s}_1, z(\tilde{s}_1, \varepsilon)) \equiv f(\tau(\tilde{s}_1), z(\tilde{s}_1, \varepsilon)) \cdot \tau'(\tilde{s}_1).$$

2. Пусть  $t \in (p_2)$ . Возьмём функцию

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau.$$

Значение интеграла  $\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$ , в силу U1, зависит от начальной и конечной точки [1],

следовательно  $\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau = A(t) - A(t_0)$ , но  $A(t_0) = 0$ . Тогда  $(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \equiv A(s_2)$ .

Учитывая все сказанное, (4) представим в виде

$$z(s_2, \varepsilon) = z^0 \exp \frac{A(s_2)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_1} f_1(\tilde{s}_1, z(\tilde{s}_1, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_2) - A(\tilde{s}_1)}{\varepsilon} d\tilde{s}_1 + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_2} f_2(\tilde{s}_2, z(\tilde{s}_2, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_2) - A(\tilde{s}_2)}{\varepsilon} d\tilde{s}_2. \quad (5)$$

В (5) проведём следующие преобразования

$$z(s_2, \varepsilon) = \exp \frac{A(s_2) - A(s_{10})}{\varepsilon} \left[ z^0 \exp \frac{A(s_{10})}{\varepsilon} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_{10}} f_1(\tilde{s}_1, z(\tilde{s}_1, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_{10}) - A(\tilde{s}_1)}{\varepsilon} d\tilde{s}_1 \right] + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_2} f_2(\tilde{s}_2, z(\tilde{s}_2, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_2) - A(\tilde{s}_2)}{\varepsilon} d\tilde{s}_2. \quad (6)$$

В (6) выражение содержащееся в [...], согласно (4) даёт значение функции  $z(s_1, \varepsilon)$  в точке  $s_1 = s_{10}$  т.е.  $z(s_{10}, \varepsilon)$ .

Следовательно (5) можно представить в следующем виде

$$z(s_2, \varepsilon) = \exp \frac{A(s_2) - A(s_{10})}{\varepsilon} z(s_{10}, \varepsilon) + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_2} f_2(\tilde{s}_2, z(\tilde{s}_2, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_2) - A(\tilde{s}_2)}{\varepsilon} d\tilde{s}_2. \quad (7)$$

(7) даёт представление решения задачи (1)-(2) на дуге  $(p_2)$ .

3. Пусть  $t \in (p_3)$ . В этом случае

$A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \equiv A(s_3)$ . Тогда (3) представим так

$$z(s_3, \varepsilon) = z^0 \exp \frac{A(s_3)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_{10}} f_1(\tilde{s}_1, z(\tilde{s}_1, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_3) - A(\tilde{s}_1)}{\varepsilon} d\tilde{s}_1 + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_{20}} f_2(\tilde{s}_2, z(\tilde{s}_2, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_3) - A(\tilde{s}_2)}{\varepsilon} d\tilde{s}_2 + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_3} f_3(\tilde{s}_3, z(\tilde{s}_3, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_3) - A(\tilde{s}_3)}{\varepsilon} d\tilde{s}_3 \quad (8)$$

В (8) проведём следующие преобразования

$$z(s_3, \varepsilon) = \exp \frac{A(s_3) - A(s_{10})}{\varepsilon} \left[ z^0 \exp \frac{A(s_{10})}{\varepsilon} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_{10}} f_1(\tilde{s}_1, z(\tilde{s}_1, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_{10}) - A(\tilde{s}_1)}{\varepsilon} d\tilde{s}_1 \right] + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_{20}} f_2(\tilde{s}_2, z(\tilde{s}_2, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_3) - A(\tilde{s}_2)}{\varepsilon} d\tilde{s}_2 + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_3} f_3(\tilde{s}_3, z(\tilde{s}_3, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_3) - A(\tilde{s}_3)}{\varepsilon} d\tilde{s}_3 = \\ = \exp \frac{A(s_3) - A(s_{10})}{\varepsilon} z(s_{10}, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \exp \frac{A(s_3) - A(s_{20})}{\varepsilon} \times \\ \times \int_0^{s_{20}} f_2(\tilde{s}_2, z(\tilde{s}_2, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_{20}) - A(\tilde{s}_2)}{\varepsilon} d\tilde{s}_2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_3} f_3(\tilde{s}_3, z(\tilde{s}_3, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_3) - A(\tilde{s}_3)}{\varepsilon} d\tilde{s}_3 = \\
 & = \exp \frac{A(s_3) - A(s_{10}) - A(s_{20})}{\varepsilon} \left[ \exp \frac{A(s_{20})}{\varepsilon} z(s_{10}, \varepsilon) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_{20}} f_2(\tilde{s}_2, z(\tilde{s}_2, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_{20}) - A(\tilde{s}_2)}{\varepsilon} d\tilde{s}_2 \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_3} f_3(\tilde{s}_3, z(\tilde{s}_3, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_3) - A(\tilde{s}_3)}{\varepsilon} d\tilde{s}_3 = \\
 & = \exp \frac{A(s_3) - A(s_{10}) - A(s_{20})}{\varepsilon} z(s_{20}, \varepsilon) + \\
 & \quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_3} f_3(\tilde{s}_3, z(\tilde{s}_3, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_3) - A(\tilde{s}_3)}{\varepsilon} d\tilde{s}_3.
 \end{aligned}$$

По итогам проведенных преобразований имеем

$$\begin{aligned}
 z(s_3, \varepsilon) = & \exp \frac{A(s_3) - A(s_{10}) - A(s_{20})}{\varepsilon} z(s_{20}, \varepsilon) + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_3} f_3(\tilde{s}_3, z(\tilde{s}_3, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_3) - A(\tilde{s}_3)}{\varepsilon} d\tilde{s}_3.
 \end{aligned} \quad (9)$$

(9) дает представление решения задачи (1)-(2) на дуге  $(p_3)$ .

Продолжив процесс получим решение задачи (1)-(2) на дуге  $(p_n)$ :

$$\begin{aligned}
 z(s_n, \varepsilon) = & \exp \frac{A(s_n) - A(s_{10}) - \dots - A(s_{n-10})}{\varepsilon} z(s_{n-10}, \varepsilon) + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s_n} f_n(\tilde{s}_n, z(\tilde{s}_n, \varepsilon)) \exp \frac{A(s_n) - A(\tilde{s}_n)}{\varepsilon} d\tilde{s}_n.
 \end{aligned} \quad (10)$$

В работах [2-3] формула (10) использована для доказательства областей притяжений вырожденных уравнений, при этом в качестве кривых  $\{(p_k), k = 1, 2, \dots, n\}$  использованы линии уровня гармонических функций  $ReA(t)$  и  $ImA(t)$ .

Пусть задана функция  $A(t)$  и выполняется условие  $U$ .  $A(t) \in Q(\Delta)$  и  $\forall t \in \Delta (A'(t) \neq 0)$ , где  $Q(\Delta)$  пространство аналитических функций в  $\Delta$ ,  $\Delta \subset C$  и  $\Delta$ - односвязная область.

Односвязность означает, что два произвольные точки области  $\Delta$  можно соединить кривыми полностью принадлежащими области  $\Delta$ .

**Определение.** Множество

$$(p) = \{t \in \Delta | u(t) = p - const\}$$

называется линией уровня функции  $u(t)$  в области  $\Delta$ .  $u(t) \equiv u(t_1, t_2)$ - некоторая гармоническая функция определенная в области  $\Delta$ .

Возьмем произвольную внутреннюю точку  $t_0$  области  $\Delta$ .

Согласно  $U$  линии уровня определяемые функциями  $ReA(t)$  и  $ImA(t)$  не имеют кратных точек.

Рассмотрим линию уровня

$$(p_{10}) = \{t \in \Delta | ReA(t) = ReA(t_0) = p_{10} - const\}.$$

Линия уровня  $(p_{10})$  проходит через точку  $t_0$ .

Пусть  $\tilde{t} \in (p_{10})$  и  $\tilde{t}$  не совпадает с точкой  $t_0$

Определим линию уровня

$$(p_2) = \{t \in \Delta | ImA(t) = ImA(\tilde{t}) = p_2 - const\}.$$

Пусть путь интегрирования состоит из части  $(p_{10})$  соединяющего точки  $t_0$  и  $\tilde{t}$  и из части  $(p_2)$  соединяющего точки  $\tilde{t}$  и  $t$ .

Линии уровня определяемые функциями  $ReA(t), ImA(t)$  являются аналитическими кривыми и их уравнения представляются параметрически.

Пусть  $(p_{10})$  представляется параметрически в виде  $t \equiv t(s)$ , где  $s$  означает длину  $(p_{10})$  отсчитываемую от точки  $t_0$  до  $\tilde{t}$ ; а  $(p_2)$  представляется в виде  $t \equiv t(\sigma)$ , где  $\sigma$  - длина  $(p_2)$  от точки  $\tilde{t}$  и  $t$ .

Согласно выбранным путям формулу (10) можно переписать в виде

$$z(t(\sigma), \varepsilon) = \exp \frac{ReA(\sigma)}{\varepsilon} z(t(\tilde{s}), \varepsilon) + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\sigma f_2(\tilde{\sigma}, z(\tilde{\sigma}, \varepsilon)) \exp \frac{ReA(\sigma) - ReA(\tilde{\sigma})}{\varepsilon} d\tilde{\sigma},$$

где

$$z(t(\tilde{s}), \varepsilon) = z^0 \exp \frac{iImA(\tilde{s})}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tilde{s}} f_1(s, z(\sigma(\varepsilon))) \times \exp \frac{i(ImA(\tilde{s}) - ImA(s))}{\varepsilon} ds.$$

### Список использованной литературы:

1. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – Москва: Наука, 1973. – 739 с.
2. Alybaev K.S, Murzabaeva A.B. Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy //In “International Conference on Analysis and Applied Mathematics” (ICAAM 2018), AIP Conference Proceedings Vol. no. 1997, American Institute of Physics.-2018.-P.020076-1-020076-5.
3. Мурзабаева А.Б. Системы сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении//Теоретические и практические вопросы современной науки: сб. научных трудов Евразийского Научного Объединения по материалам XLI международной научной конференции. № 7 (41). Москва, 2018. - С. 12-18.