УДК 517.928

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЕНИЕМ МНОЖЕСТВ ПРИ ВЫРОЖДЕНИИ
СИНГУЛЯРДУУ ДҮЛҮККӨН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ КУБУЛГАН УЧУРДА КӨПТҮКТӨРДҮ БӨЛҮҮ МЕНЕН ИЗИЛДӨӨ
STUDYING SINGULARLY PERTURNED ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SEPARATION OF SETS DURING DECAY

Мурзабаева А.Б. – ОшТУ, г.Ош

Аннотация: *В данной работе разработан метод разделения множеств дляисследовании сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений при вырождении. Обосновано необходимость метода разделения множеств. В зависимости от значения независимой переменной «множества» используется двояком смысле: если независимая переменная принимает действительные значения, то «множество» - интервал, если комплексные значения, то «множество»- область. Разделения множеств производится с применением так называемых основных функций и основных вектор функции. Также вводится понятие множеств притяжений вырожденного уравнения.*

Аннотация: *Бул жумушта сингулярдуу дүүлүккөн кадимки дифференциалдык теңдемелердин кубулган учурда изилдөө көптүктөрдү бөлүү методу ителип чыгылган. Көптүктөрдү бөлүп алуу методунун зарылчылыгы негизделген. Көз каранды эмес өзгөрмөнүн чыныгы маанилеринде "көптүк" – интервал, комплекстик маанилеринде "көптүк"- область мааниде колдонулат. Көптүктөрдү бөлүү негизги функция жана негизги вектор функция жардамында жүргүзүлөт. Кубулган теңдеменин тартуу көптүгү түшүнүгү киргизилет.*

Annotation: *In this paper, a set separation method has been developed for the study of singularly perturbed ordinary differential equations with degeneration. The necessity of methods of separation of sets is grounded. Depending on the value of the independent variable "set", a double meaning is used: if the independent variable takes real values, then "set" is an interval, if complex values, then "set" is a region. Separation of sets is carried out using so-called basic functions and basic vector functions. The concept of sets of attractions of a degenerate equation is also introduced.*

Ключевые слова: *сингулярно возмущенные уравнения, вырожденное уравнение, разделение множеств, линии уровня, главные множества.*

Ачкыч сөздөр: *сингулярдуу дүлүккөн теңдеме, кубулган теңдеме, көптүктөрдү бөлүү, деңгээл сызыктар, башкы көптүктөр.*

Key words: *singularly perturbed equations, degenerate equation, separation of sets, level lines, major sets.*

Сокращенные записи и понятия

СВУ(R∨C) - означает сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения (скалярные или векторные) с действительным или комплексным аргументом.

(ВУ) – означает вырожденное уравнение;

(ОФ) – основная функция; заданные функции с действительным или комплексным аргументом.

(ОВФ) – основная вектор функция; заданные вектор - функции с действительным или комплексным аргументом.

Определение 1. 1.Заданы (ОФ) или (ОВФ) и множество Δ, где определены (ОФ) и (ОВФ).
2. Сформулированы условия {(U)} на (ОФ) и (ОВФ).
3. Условия {(U)} делят множество Δ на части.

При выполнении условий 1-3 будем говорит, что произведено деление множество Δ относительно условий {(U)} .

Определение 2. Множество значений независимой переменной уравнений, назовңм главным множеством и обозначим (ГМ).

Определение 3. Пусть $z(t,\varepsilon)$ – решение заданного СВУ (удовлетворяющие некоторому начальному условию) и $\xi(t)$ – решение (ВУ), соответствующее заданному СВУ, определенные в множестве Δ.

Если $\forall t \in \Delta(z(t,\varepsilon) \to \xi(t) по \varepsilon)$, то Δ назовём множеством притяжения решения $\xi(t)$.

Определение 4. Пусть: 1. $\Delta \theta \Delta_1 \cup \Delta_2$.

2. $\Delta_1\big(\xi_1(t)\big)$, $\Delta_2\big(\xi_2(t)\big)$ где $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ – решение (ВУ).

Если выполняются условия 1-2, то множества Δ_1 и Δ_2 назовём сложными множествами притяжений.

Основная часть

1. Основные функции, основные вектор функции и разделение главных множеств

Если задана (СВУ) вида

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon b(t) + f\big(t, z(t,\varepsilon)\big), \tag{1}$$

то правая часть по t определяет некоторое множество Δ т.е считается $t \in \Delta$.

В зависимости от значений t множество Δ может быть интервалом действительной оси, областью в комплексной плоскости.

Уравнение (1) при $\varepsilon = 0$ вырождается в уравнение

$$a(t)\xi(t) + f\big(t, \xi(t)\big) = 0 \tag{2}$$

Множество, где определена (2) обозначим Δ_1. Поскольку при вырождении теряются отдельные члены в (1), то $\Delta \subseteq \Delta_1$.Следовательно можно считать, что (2) рассматривается для $t \in \Delta$. Нас интересуют решения уравнения (2) относительно $\xi(t)$. Такие решения существуют не для всех значений $t \in \Delta$. К примеру, если рассмотреть уравнение

$$a(t)\xi(t) + c(t)\xi^2(t) = 0,$$

то она имеет решения

$$\xi_1(t) \equiv 0, \qquad \xi_2(t) = -a(t)/c(t).$$

Решение $\xi_2(t)$определена только для значений $t \in \Delta(c(t) \neq 0)$.

Если предположить, уравнение (2) имеет решения $\xi_j(t) (j = 1,2,\dots,n)$, то мы должны предположить, $\forall t \in \Delta$ ($\xi_j(t)$-определены).

Таким образом множество Δ определяется совокупностью

$$\Big(a(t), b(t), f(t,z), \xi_j(t) (j = 1,2,\dots,n)\Big). \tag{3}$$

Если рассмотреть совокупность (3) при фиксированнойj, то множество Δ имеет расширение.

Описанную процедуру можно проделать и в обратном порядке.

Взяв произвольную совокупность (3) можно составить уравнение (1) и из него определить (2).

В (1) проведем преобразование

$z - \xi_j(t) = u_j(t,\varepsilon)$ – новая неизвестная функция;

и получим уравнение

$$\varepsilon u_j'(t,\varepsilon) = a_j(t)u_j(t,\varepsilon) + \varepsilon b_1(t) + f_j\left(t, u_j(t,\varepsilon)\right). \qquad (4)$$

В (4) считаем $t \in \Delta, \left|f_1\left(t,u_j\right)\right| \equiv o\left(\left|u_j\right|\right)$ и $f_1(t,0) \equiv 0$.

Вместо (2.2.3) имеем совокупность

$$\left(a_j(t), b_j(t), f_j(t,u)\right) \qquad (5)$$

и будем считать, совокупность (5) при любом j определена в Δ. Далее, в наших исследованиях, в основном будем рассматривать функции$a_j(t)$ и будем считать $\forall t \in \Delta\left(a_j(t) \not\equiv 0\right)$.

Определение 5. Функцию $a_j(t)$ назовём основной функцией (ОФ).

Пусть рассматривается система из нескольких уравнений первого порядка

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = A(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon b(t) + f\left(t, z(t,\varepsilon)\right) \qquad (6)$$

где $A(t)$- квадратная матрица порядка $n \times n; b(t) = colon(b_1(t), b_2(t), \dots, f_n(t), f(t,z) = colon(f_1(t,z), f_2(t,z), \dots, f_n(t,z);$ $t \in \Delta$ и соответствующая вырожденная система имеет изолированные решения (необходимые определения будут изложены ниже) $\xi_k(t)$- вектор-столбцы размерности $n(k = 1,2,\dots,m)$.

В (6) проведя замену неизвестной вектор-функции$z(t,\varepsilon) = \xi_k(t) - v_k(t,\varepsilon)$ – новая неизвестная вектор- функция получим систему

$\varepsilon v_k'(t,\varepsilon) = A_k(t)v_k(t,\varepsilon) + \varepsilon b_k(t) + f_k\left(t, v_k(t,\varepsilon)\right)$.(7)

В (7) считаем $t \in \Delta$.

Пусть матрица $A_k(t)$ при фиксированномk имеет различные собственные значения $a_{kj}(t)(j = 1,2,\dots,n)$. Для этого случая множество Δ (при фиксированном k) определяется совокупностью $\left\{a_{kj}(t), b_{kj}(t), f_{kj}(t,v_k)\right\}$.

Определение 6. Вектор-функцию $a_{k0}(t) = \left(a_{k1}(t), \dots, a_{kn}(t)\right)$ назовём основной вектор–функцией (ОВФ).

Заранее можно ожидать, что решения вырожденного уравнения (системы) имеют различные множества притяжений и задача состоит в определении таких множеств. Таким образом для доказательства существование множества притяжений предварительно с помощью, каких то, средств надо произвести деление множеств Δ на части и выбрать те части, которые могут быть множествами притяжений. Следовательно «разделение» множества состоит из двух составляющих: «деление множества на части» и «выбора частей».

«Разделение» применяются при исследование различных задач и объектов. К примеру в теории релаксационных колебаний (разделение заданных систем дифференциальных уравнений на быстрые и медленные), разделение множеств на классы по мощности.

В общем случае разделение объектов производится с использованием некоторых средств и свойств (монотонность, знакопостоянство, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость, аналитичность, упорядеченность, норма и.т.д).

В наших исследованиях используем гармонические функции в качестве (ОФ), (ОВФ) и их линии уровня для деления областей.

2.Деление областей с применением гармонических функций

Возьмем функции $a_j(t)(j = 1,2,\dots,n\,)t \in \Delta$ и произведем деление области Δ на части.

U1. Пусть $a_j(t) \in Q(\Delta)$ (j=1,2,…,n) и $\in \forall t \in \Delta\left(a_j(t) \neq 0\right)$.

Определим функции $A_j(t) = \int_{t_0}^{t} a_j(\tau)d\tau$, где $t_0 \in \Delta$ и её внутренняя точка.

Согласно U.1 функции $A_j(t) \in Q(\Delta)$. Введем в рассмотрение функции

$$ReA_j(t) = A_{j1}(t_1,t_2),\ \Im mA_j(t) = A_{j2}(t_1,t_2).$$

Определим линии уровня

$$(p_{0j1}) = \{t \in \Delta | A_{j1}(t_1, t_2) = 0\}, (j = 1,2, \dots, n).$$

Фиксируем j и рассмотрим (p_{0j1}). Согласно U1 функция $A_j(t)$ в области Δ не имеет кратных точек и через любую точки области Δ проходит единственная линия уровня функций $A_{jk}(t_1, t_2)(k = 1,2)$. Для наглядности будем считать, что в области Δ имеется одна единственная связная линия уровня (p_{0j1}).

К примеру возьмём$A_{j1}(t_1, t_2) = t_1^2 - (t_2 + 1)^2$,$(t_1, t_2) \in R^2, t_0 = t_{10}, t_0 \in R$и $t_{10} < -1$.

Определим линию уровня

$$(p_{0j1}) = \{(t_1, t_2) \in R^2 | t_1^2 - (t_2 + 1)^2 = t_{10}^2 - 1\}.$$

Существует другая часть линии уровня (p_{0j1}) проходящая через точку $(-t_{10}; 0)(-t_{10} > 1)$. ($(p_{0j1})$ состоит из двух связных компонент). Таким образом область R^2 разделяется на три части (рис.1).

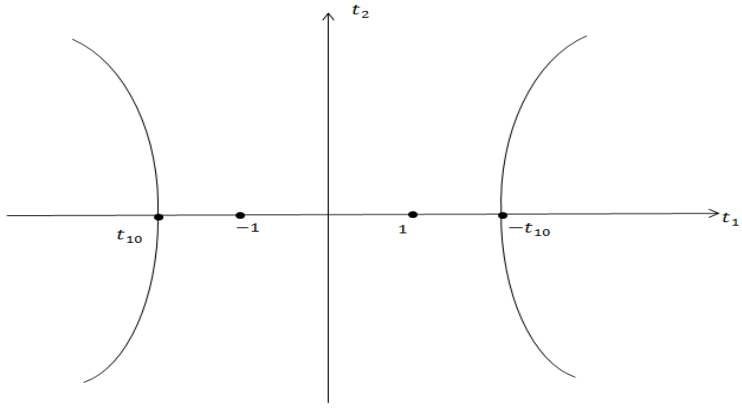

рис.1

Если рассмотреть область $R_+^2 = \{(t_1, t_2) \in R^2 | 0 \le t_1 < +\infty, -\infty < t_2 < +\infty\}$, то существует одна связная компонента (p_{0j1}) и она линией (p_{0j1})разделяется на две части.

Таким образом линия (p_{0j1}) область Δ делит на две части: Δ_{j11} и Δ_{j12}.

На линии (Δ_{0j1}) возьмем произвольную точку $\tilde{t} = \tilde{t}_1 + i\tilde{t}_2$ и проведём линию уровня $(\tilde{p}_{j2}) = \{t \in \Delta | A_{j2}(t_1, t_2) = \tilde{p}_{j2}\}$.

Функцию $A_{j1}(t_1, t_2)$ рассмотрим вдоль $(\tilde{p}_{j2})$. По определению $A_{j1}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) = 0$ и возможны следующие, взаимно исключающие случаи:

1. $\left(\forall t \in \Delta_{j11}\left(A_{j1}(t_1, t_2) \le 0\right) \wedge \forall t \in \Delta_{j12}\left(A_{j1}(t_1, t_2) \ge 0\right)\right)$.
2. $\left(\forall t \in \Delta_{j11}\left(A_{j1}(t_1, t_2) \ge 0\right) \wedge \forall t \in \Delta_{j12}\left(A_{j1}(t_1, t_2) \le 0\right)\right)$.

Случаи 1 и 2 равноправны и далее в наших исследованиях, для определенности будем считать

$$\left(\forall t \in \Delta_{j11}\left(A_{j1}(t_1, t_2) \le 0\right) \wedge \forall t \in \Delta_{j12}\left(A_{j1}(t_1, t_2) \ge 0\right)\right), \qquad (A1)$$

причем равенства выполняется только на (p_{0j1}). Аналогично линия (p_{0j2}) область Δ делит на части $\Delta_{j21}, \Delta_{j22}$. Для этого случая возьмём

$$\left(\forall t \in \Delta_{j21}\left(A_{j2}(t_1, t_2) \le 0\right) \wedge \forall t \in \Delta_{j22}\left(A_{j2}(t_1, t_2) \ge 0\right)\right). \ (A2)$$

На линии (p_{0j1}), по обе стороны от точки t_0, возьмём точки T_{j11}, T_{j12}. t_0 внутренняя точка области Δ,следовательно такие точки всегда существуют.

Также на линии уровня (p_{0j2}), по обе стороны от точки t_0, возьмём точки T_{j21}, T_{j22} и введем в рассмотрение линии уровня

$$(p_{j11}) = \{t \in \Delta | A_{j1}(t_1, t_2) = A_{j1}(T_{j21}) = p_{j11} - const\},$$
$$(p_{j12}) = \{t \in \Delta | A_{j1}(t_1, t_2) = A_{j1}(T_{j22}) = p_{j12} - const\},$$
$$(p_{j21}) = \{t \in \Delta | A_{j2}(t_1, t_2) = A_{j2}(T_{j11}) = p_{j21} - const\},$$
$$(p_{j22}) = \{t \in \Delta | A_{j2}(t_1, t_2) = A_{j2}(T_{j12}) = p_{j22} - const\} \text{ (рис.3).}$$

Линия уровня (p_{j11}) и (p_{j12}) лежат по обе стороны от линии (p_{0j1}), следовательно имеет место одно из следующих неравенств

$$(p_{j11} < 0 \; и p_{j12} > 0) \text{ или } (p_{j11} > 0 \; и p_{j12} < 0).$$

Для определенности возьмём

$$(p_{j11} < 0 \; и p_{j12} > 0).$$

Поступая таким же образом возьмём

$$(p_{j21} < 0 \; и p_{j22} > 0).$$

Область окруженную линиями $(p_{jkm})(k, m = 1,2)$ обозначим Δ_{j0}(рис.2).

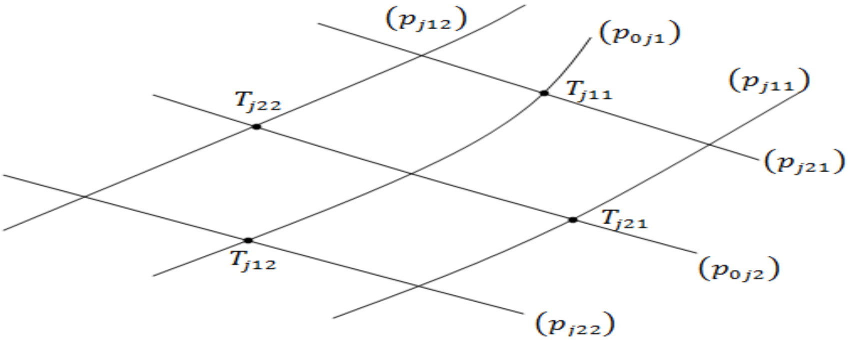

Рис.2

Очевидно, что области $\Delta_{j0}(j = 1,2, \dots, n)$ имеют общую точку t_0. Имеют ли области Δ_{j0} одну общую часть остается открытым.

Определение 7. Области Δ_{j0} назовём базовыми и обозначим $\Delta_{j0}(B)$.

Приведем пример на определение базовых областей

Пример 1. Пусть $a_1(t) = 1$ и $a_2(t) = 2t$;

$$\Delta = \{t \in C | Re t > 0, -\infty < \mathcal{I}m(t) < +\infty\}; t_0 = 1.$$

Определим функции $A_j(t)(j = 1,2)$.

$$A_1(t) = \int_1^t d\tau = t - 1, \;\; A_2(t) = 2\int_1^t \tau d\tau = t^2 - 1.$$

Далее $A_{11}(t_1, t_2) = t - 1, \;\; A_{11}(t_1, t_2) = t_2,$
$A_{21}(t_1, t_2) = t_1^2 - t_2^2 - 1, \;\; A_{22}(t_1, t_2) = 2t_1 t_2.$

Определим линии уровня

$$(p_{011}) = \{t \in \Delta | t_1 - 1 = 0\},$$
$$(p_{012}) = \Delta,$$
$$(p_{021}) = \{t \in \Delta | t_1^2 - t_2^2 - 1 = 0\},$$
$$(p_{022}) = \{t \in \Delta | t_2 = 0\} \qquad \text{(рис.3)}$$

Области Δ_{111} и Δ_{112} представлены на рис.3.

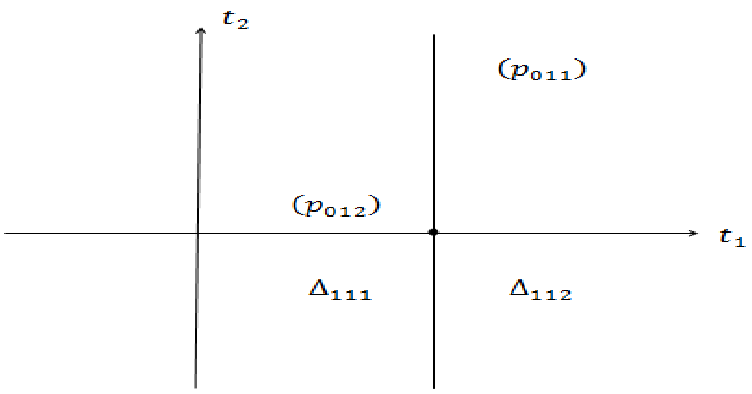

Рис.3

Области Δ_{221} и Δ_{222}представлены на рис.4.

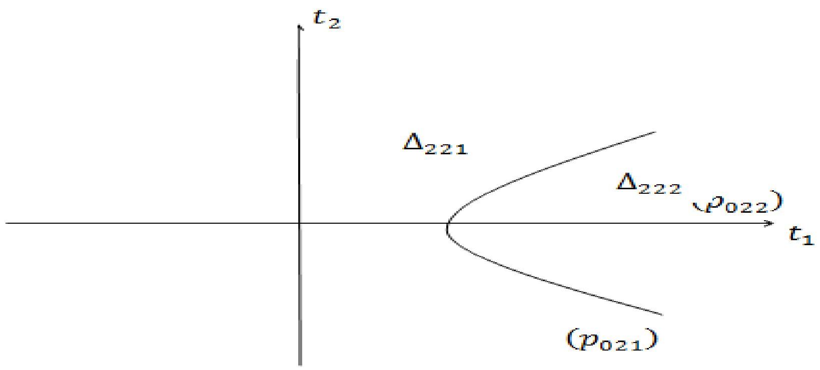

рис.4

Далее возьмём линии уровня

$$(p_{111}) = \left\{t \in \Delta \middle| t_1 = \frac{1}{2}\right\},$$
$$(p_{112}) = \{t \in \Delta | t_1 = 2\},$$
$$(p_{221}) = \{t \in \Delta | t_2 = -1\},$$
$$(p_{222}) = \{t \in \Delta | t_2 = 1\}$$

и область ограниченную этими линиями обозначим $\Delta_{10}(B)$. (рис.5) .

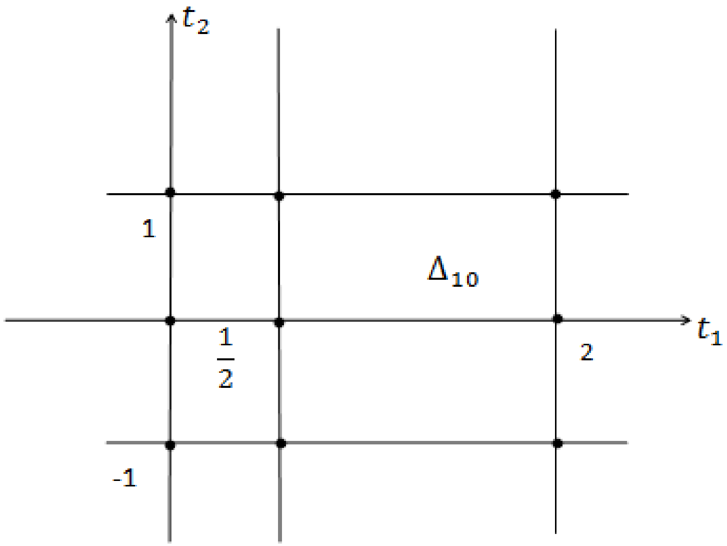

рис.5

Также возьмём линии уровня

$$(p_{211}) = \{t \in \Delta | t_1^2 - t_2^2 - 1 = 3\},$$

$$(p_{212}) = \left\{t \in \Delta \middle| t_1^2 - t_2^2 - 1 = -\frac{3}{4}\right\},$$

$$(p_{221}) = \{t \in \Delta | t_2 = -1\},$$

$$(p_{222}) = \{t \in \Delta | t_2 = 1\}$$

и область ограниченную линиями обозначим $\Delta_{20}(B)$ (рис.6).

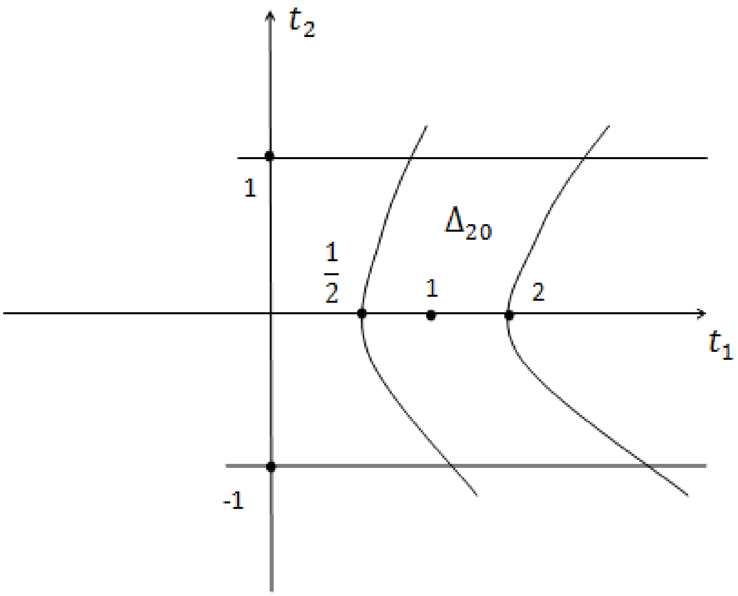

Рис.6

Для рассматриваемого случая $\Delta_{10} \cap \Delta_{20}$ изображен на рис. 7

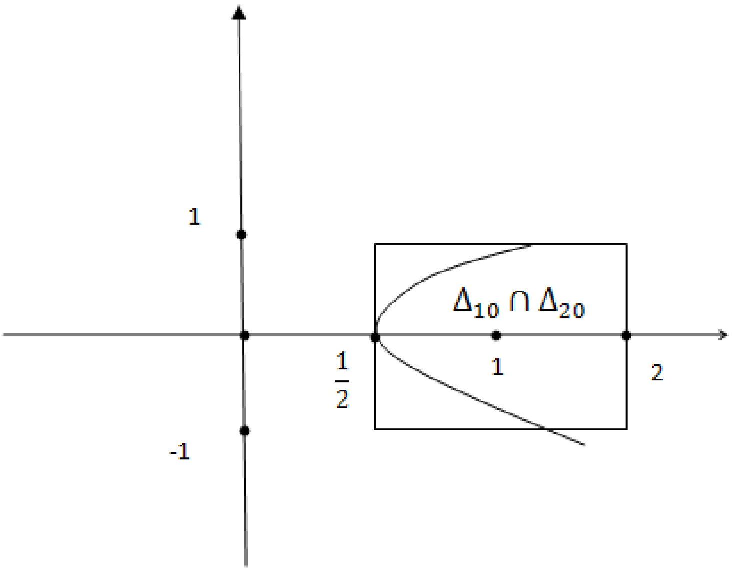

рис.7

Разработанный метод применяется для исследование СВУ при вырождении. В частности этот метод применен в работах [1-5].

Список использованной литературы:

1. Алыбаев К.С. Мурзабаева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении // Итоги науки в теории и практике 2017: сб. научных трудов Евразийского Научного Объединения по материалам XXXIV международной научной конференции. № 12 (34). Москва, 2017. - С. 15-20**.**
2. Алыбаев К.С, Мурзабаева А.Б. Построение областей притяжения при вырождении сингулярно возмущенных уравнений // Международный научно-исследовательский журнал. № 9 (75). Екатеринбург, 2018. - С. 7-11.
3. Alybaev K.S, Murzabaeva A.B. Singularly perturbed first-order equations in complex domains that lose their uniqueness under degeneracy. //In “International Conference on Analysis and Applied Mathematics” (ICAAM 2018), AIP Conference Proceedings Vol. no. 1997, American Institute of Physics.-2018.-P.020076-1-020076-5.Режимдоступа:https://doi.org/10.1063/1.5049070.
4. Мурзабаева А.Б. Нарушение единственности решений вырожденного уравнения для сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями //Известия КГТУ им.И.Раззакова. Материалы Международной конференции «Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании», посвященной 75-летию академика А.Жайнакова. - Бишкек, 2016. - С.162-169.
5. Мурзабаева А.Б. Системы сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями теряющие единственность при вырождении // Теоретические и практические вопросы современной науки: сб. научных трудов Евразийского Научного Обѳединения по материалам XLI международной научной конференции. № 7 (41). Москва, 2018. - С. 12-18.