УДК 551.2

ДИОФАНТТЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИН ИЗИЛДӨӨ
ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ
INVESTIGATION OF SOLUTIONS OF THE DIOPHANTINE EQUATION

Шарапов С.Т. – ЖАМУнун окутуучусу,
sardarbek1972@mail.ru
Абиева М.Ш. – Жалал-Абад педагогикалык колледжинин окутуучусу

Аннотация: *Бул макалада Диофонттык теңдемелер жана аларды чыгаруунун өзгөчө учурлары каралган. Теңдемелердин чечимдеринин жашоо шарттары теориялык жактан негизделген. Үчүнчү даражадагы Диофанттык теңдемелерди чыгаруунун айрым жолдору көргөзүлгөн.*

Аннотация: *В этой статье рассматриваются Диофантовые уравнения и особенности их решения. Условия существования решений уравнений теоретически обоснованы. Указаны некоторые пути решения Диофантовых уравнений третьей степени.*

Annotation: *In this paper, we consider the Diophantine equations and their singularities in the solution. Theory is justified the conditions of existence of the solution of the equation. Some Diophantine equations of third degree are indicated.*

Ачкыч сөздөр: *Чынжырлуу бөлчөктөр, аныкталбаган теңдеме, симметриялык көпмүчө, сандын каноникалык ажыралышы, сандык салыштыруулар.*

Ключевые слова: *Цепные дроби, неопределённые уравнения, симметрические многочлены, каноническое разложение числа, числовые сравнения.*

Key words: *Chain fractions, undefined equation, symmetric polynomials, canonical decomposition of a number, numerical comparison.*

Диофанттык теңдемелердин жалпы көрүнүшү
$ax^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n = N,$
түрүндө болуп, мындай теңдемелердин бүтүн сандардын көптүгүндөгү чыгарылышынын жалпы усулу ущул күнгө чейин аныкталган эмес. Диофант байыркы грек математиги болуп, ал үчүнчү кылымдын аягы жана төртүнчү кылымдын баштарында Александрияда жашап, илимдин өнүгүшүнө чоң эмгек сиңирген.

Диофанттык теңдемелердин айрымдарына токтолуп өтөбүз:

1) $x^2 + y^2 = N$. Бул жерде N>0 бүтүн сан. Теңдеменин бүтүн сандардын көптүгүндөгү чыгарылышы окумуштуулар тарабынан толук изилденген. Теңдеме качан гана чыгарылышка ээ болот, качан гана N дин каноникалык ажыралышында $4n + 3$ көрүнүшүндөгү жөнөкөй сандар катышпаса.

Көрүнүп тургандай теңдеменин чыгарылышы жөнөкөй сандардын жайгашуусунун жалпы закон ченемдүүлүгүнөн көз каранды. Бирок, жөнөкөй сандардын натуралдык сандардын катарындагы закон ченемдүүлүгү ушул күнгө чейин аныкталган эмес.

2) $x^2 + Dy^2 = 1$. Бул теңдеме Ферманын аныкталбаган теңдемеси деп аталып, ал Диофанттык теңдемелер теориясында өзгөчө мааниге ээ. Теңдеме D нын кандайдыр бир сандын толук квадратына барабар болбогон учурунда бүтүн сандардын көптүгүндө чексиз чыгарылышка ээ болоору көргөзүлгөн. Теңдемени чыгаруу үчүн $\overline{D}$ чынжырлуу бөлчөккө ажыратылат. $\overline{D}$ иррационалдык сан болгондуктан ал мезгилдүү чексиз чынжырлуу

бөлчөктү берет. Чынжырлуу бөлчөктүн мезгилдүүлүгүнө карап теңдеменин тамырлары аныкталат.

$x_0 = P_{k-1},\ y_0 = Q_{k-1}$, эгерде k жуп болсо.

$x_0 = P_{2k-1},\ y_0 = Q_{2k-1}$, эгерде k так болсо.

Бул жерде k- чынжырлуу бөлчөктүн мезгилдүүлүгү.

Мисал: $x^2 - 22y^2 = 1,\ x, y \epsilon Z_+$

Теңдемени чыгаруу үчүн $\overline{22}$ санын чынжырлуу бөлчөккө ажыратабыз:

$\overline{22}$ = 4+ $\underline{1 + 2 + 4 + 2 + 1 + 8}$ +...

Демек, чынжырлуу бөлчөктүн мезгилдүүлүгү $k = 6$ (асты сызылган сандар кайталанат). Бул чынжырлуу бөлчөккө туура келүүчү бөлчөктү эсетейбиз жана $x_0 = P_5$, $y_0 = Q_5$ маанилерин алабыз. Мында $x_0 = 197,\ y_0 = 42$ болот.

3) $x^n + y^n = z^n$. Теңдеме n дин ар кандай маанисинде оң бүтүн сандардын көпүгүндө чыгарылышка ээ болобу? деген суроо ушул күнгө чейин математиктерди кызыктырып келүүдө. Төмөнкүдөй учурларды карап чыгабыз:

а) n=1, үчүн теңдеменин жалпы чыгарылышы толук изилденген $x + y = z$. теңдемеси бүтүн сандардын көптүгүндө ар дайым чыгарылышка ээ болоору көргөзулгөн.

б) $n = 2$ учурун карасак.

$x^2 + y^2 = z^2$. Мында x,y жана z сандары кандай шарттарды канаттандырганда теңдеме чыгарылышка ээ болоору далилденген. Геометриялык жактан алып карасак бул теңдеме пифагор теоремасына тең күчтүү же борбору координаталар башталышында болгон айлана түрүндө кароого болот. Бул жерда $x, y, z \in Z$

Экинчи даражадагы Диофанттык теңдеменин айрымдарына токтолобуз.

Жогоруда көргөзүлгөн теңдемелер катары төмөнкүдөй теңдеменин бүтүн сандардын көтүгүндөгү чыгарылышын карап чыгалы .

$$ax^2 + bx + c + dy = 0$$

Теңдеменин жалпы чыгарылышын алуу үчүн аны салыштыруу түрүндө жазып алабыз.

$$ax^2 + bx + c + dy \equiv 0(mod\ d)$$

Бул жерде d курама жана жөнөкөй сан болушу мүмкүн. Анда салыштыруунун касиеттерин колдонуп,

$$(x - \alpha)^2 \equiv \beta(mod\ d)$$

көрунүшкө келтиребиз. Эгерде d жөнөкөй сан болсо, анда Лежандрдин символуна ылайык $\beta^{\frac{d-1}{2}} \equiv +1(mod\ d)$ же $\beta^{\frac{d-1}{2}} \equiv -1(mod\ d)$ көрүнүшүндө болот. Мында +1 ге барабар болсо чыгарылышка ээ,ал эми -1 болсо чыгарылышка ээ болбойт. d курама сан болсо, анда Якобинин белгиси боюнча текшерилет.

Мисалы: $2x^2 + 3x + 7y = 5$ теңдемени бүтүн сандардын көптүгүндө чыгаргыла.

Чыгаруу: $2x^2 + 3x - 5 \equiv 0(mod\ 7)$

$2x^2 + 10x - 12 \equiv 0(mod\ 7)$

$x^2 + 5x - 6 \equiv 0\ mod\ 7$

$x^2 - 2x - 6 \equiv 0(mod\ 7)$

$(x - 1)^2 - 1 - 6 \equiv 0(mod\ 7)$

$x - 1 \equiv 0(mod\ 7)$

$x \equiv 1(mod\ 7)$

Салыштырууну теңдеме түрүндө жазып алып, берилген теңдемеге коёбуз:

$x = 1 + 7t,\ t = 0, \pm1, \pm2, ...$

$2 \cdot (1 + 7t)^2 + 3 \cdot\ 1 + 7t\ + 7y = 5$

$98t^2 + 49t + 7y = 0$ же

$14t^2 + 7t + y = 0$

$y = -14t^2 - 7t$
Демек, теңдеменин жалпы чечими $x = 1 + 7t, y = -14t^2 - 7t$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ көрүнүшүндө болот.

$x^2 + axy + y^2 = N$ көрүнүшүндөгү теңдеменин жалпы чыгарылышын карап чыгабыз. Элементардык симметриялык көп мүчөлөрду колдонуп жөнөкөйлөтөбүз.

$(x + y)^2 - 2xy + axy = N$
$(x + y)^2 + (a - 2)xy = N$
${\sigma_1}^2 + (a - 2)\sigma_2 = N$, бул жерде $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$
Мында төмөнкүдөй учурлар болушу мүмкүн:
1) $a - 2$ саны 1 ден айырмалуу терс же оң сан болсун. ${\sigma_1}^2 - (a - 2)\sigma_2 = N$ же ${\sigma_1}^2 = N + (a - 2)\sigma_2$, эки учурда да тең теңдеме төмөнкүдөй салыштыруу түрүндө жазылат
${\sigma_1}^2 = N(mod\ \ a - 2\ )$
Салыштыруу Лежандрдин белгисине карап чыгарылат.
2) $a - 2 = 0$ болсо, тендеме ${\sigma_1}^2 = N$ көрүнүшүндө болот. Мында N саны кандайдыр бир сандын толук квадратына барабар болушу керек.
3) $a - 2 = \pm 1$ болсун. Анда теңдеме ${\sigma_1}^2 \pm \sigma_2 = N$ болуп, мында ${\sigma_1}^2 = N \mp \sigma_2$ же $\sigma_1 = \sqrt{N \mp \sigma_2}$ болот. Мында $N - \sigma_2 > 0$ болушу керек.
Мисал: $x^2 + 3xy + y^2 = 31$, $x, y \epsilon z_+$ теңдемени бүтүн сандардын көптүгүндө чыгаргыла.
Чыгаруу: Теңдемеден толук квадратты бөлүп алабыз,
$(x + y)^2 - 2xy + 3xy = 31$ же
$(x + y)^2 + xy = 31$
$\sigma_1^2 + \sigma_2 = 31$
$\sigma_1 = \sqrt{31 - \sigma_2}$
$31 - \sigma_2 > 0$ же $\sigma_2 < 31$ сандарды кабыл алат. σ_1 оң бүтүн сан болушу үчүн $\sigma_2 = 6; 15; 22; 27; 30$ сандарды кабыл алат.
$\sigma_2 = 6,\ \ \sigma_1 = 5$
$\sigma_2 = 15,\ \ \sigma_1 = 4$
$\sigma_2 = 22,\ \ \sigma_1 = 3$
$\sigma_2 = 27,\ \ \sigma_1 = 2$
$\sigma_2 = 30,\ \ \sigma_1 = 1$
Анда виет теоремасын колдонуп теңдеме түзүп алабыз:
$t^2 - 5t + 6 = 0$, мындан $t_1 = 2, t_2 = 3$ болот. Башкача айтканда $x = 2, y = 3$ же $x = 3, y = 2$.
σ_1 жана σ_2 нин калган баардык маанилеринде теңдеме чыгарылышка ээ болбойт.
в) $n \geq 3$ учуру үчүн жалпы шарт же жалпы формула көргөзүлгөн эмес. Диофанттык теңдемеде $n = 3$ учуру үчүн изилдөөлөрдү жүргүзөбүз.
$x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = N$
$(x + y)^3 - 3xy\ \ x + y\ \ + xy\ \ ax + by\ \ = N$
$(x + y)^3 + xy\ \ -3x - 3y + ax + by\ \ = N$
$(x + y)^3 + xy\ \ \ a - 3\ \ x +\ \ b - 3\ \ y\ \ = N$
Төмөнкүдөй учурлар болушу мүмкүн:

1) $a - 3 = 0$ жана $b - 3 = 0$ болсун. Анда теңдеме $(x + y)^3 = N$, көрүнүшүнө болуп, теңдеменин чыгарылышы N санына байланыштуу болот.
2) $a - 3 = 1$ жана $b - 3 = 1$ болсун, анда теңдеме $(x + y)^3 + xy\ \ x + y\ \ = N$ көрүнүшүндө болот. Мында теңдемени көбөйтүүчүлөргө ажыратыб жазабыз: $x + y\ \ ((x + y)^2 + xy) = N$. Теңдеменин чыгарылышы N санына

байланыштуу болот. N саны жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө ажыратылат жана теңдемелердин системасы түзүлөт.

Мисал: $x^3 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3 = 76$

Чыгаруу: $(x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 4x^2y + 4xy^2 = 76$

$(x + y)^3 + x^2y + xy^2 = 76$

$x + y \quad x + y\ ^2 + xy \ = 76$

Мындан теңдемелер системасын түзүп алабыз. 76 санынын канониканалык ажыралышы $76 = 2^2 \cdot 19$ болгондуктан

$x + y = 4$

$(x + y)^2 + xy = 19$

Теңдемелер системасын чыгарып, төмөнкүлөрдү алабыз:

$x_1 = 3, y_1 = 1$ жана $x_2 = 1, y_2 = 3$

Мындай системалардын бир канчасын алабыз, бирок айрымдары бүтүн сандардын көптүгүндө чыгарылышка ээ болбой калат. Биз жекече бир учурун гана карадык.

3) $a - 3 \neq 1$ жана $b - 3 \neq 1$ болгон учурда теңдемени чыгаруу татаалдашып, негизги бир жолго салуу мүмкүн болбой калат.

Жогорку даражадагы Диофанттык теңдемелерди чыгаруу, жөнөкөй сандардын натуралдык сандардын катарындагы жайгашуу закон ченемдүүлүгү менен үзгүлтүксүз байланышта болот.

Мисал катарында төмөнкү теңдемени алалы

$x^3 + 7x^2y - 2xy^2 + y^3 = 83$

Тендемени чыгаруу үчүн жогоруда көргөзүлгөн усулдарды колдонуп көрөбүз.

$x^3 + y^3 \ + xy \ 7x - 2y \ = 83$

$(x + y)^3 - 3xy \ x + y \ + xy \ 7x - 2y \ = 83$

$(x + y)^3 + xy \ 7x - 2y - 3x - 3y \ = 83$

$(x + y)^3 + xy \ 4x - 5y \ = 83$

Теңдемени чыгаруу үчүн 83 санын. сандын толук кубу жана кандайдыр сандын суммасы көрүнүшүндө жазып алуу керек болот. Бирок, ар дайым бүтүн сандардын көптүгүндө чыгарылышка ээ боло бербейт. Алардын ичинен бүтүн маанилерин тандап алабыз. Бул тендеменин бир чыгарылышы $x = 2, \ y = 3$ болуп эсептелет.

Диофанттык теңдемелердин даражалары канчалык чоң болсо теңдеменин чечимдери үчүн коюлуучу шарттар да көп болоору байкалат.

Колдонулган адабияттардын тизмеси:

1. А.А. Бухштаб. Теория чисел., Москва, “Просвещение”, 1966г.
2. Г.А. Кудреватов. Сборник задач по теории чисел., Москва, “Просвещение”, 1970г.
3. А.О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах., Москва, “Наука”, 1983г.
4. И.Г.Башмакова. Диофант и Диофантовы уравнения., Москва, “Наука”, 1972г.