УДК 517.928

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ПОРЯДКА ОДНА ТРЕТЬЯ
ҮЧТӨН БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ӨЗГӨЧӨ АЛСЫЗ ЧЕКИТТҮҮ БИСИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ
ASYMPTOTICA OF THE SOLUTION OF THE BISINGULARY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE WEAK SINGULARY POINT OF THE POWER OF THE ONE THREE

Азимов Б.А.
ОшМУ, г.Ош, bk_12@rambler.ru

Аннотации. Здесь асимптотика решения краевой задачи, для бисингшулярно возмущенного линейного дифференциального уравнения второго ПОРЯДКА со слабой особой точкой построена, с точностью до первого порядка включительно относительно малого параметра.

Мында алсыз өзгөчө чекиттүү бисингулярдуу козголгон экинчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдеме үчүн чек ара маселесинин ЧЕЧИМИНИН кичине параметрдин биринчи тартипке чейинки асимптотикасы тургузулду.

Here it is constructed the asymptotic of the solution of the boundary value problem of the bisingular perturbed of the linear differential equation of the second order till the first power of the small parameter.

1/Постановка задачи.

Рассматривается следующая краевая задача

$$z(0)=a\sqrt{e^3}\,/\,b,\qquad z(1)=1. \tag{5}$$

Решение задачи (4)-(5) ищем в виде

$$z(x)=z_0(x)+\sum_{k=0}^{5}\mu^k\pi_k(t)+R(x,\varepsilon), \tag{6}$$

где $t=x/\mu^3$, $\varepsilon=\mu^4$, $R(x,\varepsilon)$ – остаточная функция.

Подставляя соотношение (6) в задачу (4)-(5), получаем:

$$\begin{gathered}\varepsilon\left(z_0''(x)+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}z'_0(x)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)z_0(x)\right)+\sqrt[3]{x}z'_0(x)+\\+\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=0}^{5}\mu^k\left(\pi_k''(t)+\sqrt[3]{t}\pi_k'(t)\right)+\sum_{k=0}^{5}\mu^k\left(\frac{2}{\sqrt[3]{t}}\pi_k'(t)-\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\pi_k(t)+\frac{\mu^2}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_k(t)\right)+\\+\varepsilon\left(R''(x,\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}R'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)R(x,\varepsilon)\right)+\sqrt[3]{x}R'(x,\varepsilon)=0,\end{gathered} \tag{7}$$

$$z_0(1)=1,\ \pi_0(0)=\frac{a\sqrt{e^3}}{b}-1,\pi_0(\tilde\mu)=0,\ \tilde\mu=\mu^{-3},\ \pi_s(0)=0,\ \pi_s(\tilde\mu)=0,\ s=1,2,\ldots,5. \tag{8}$$

Из равенства (7) и (8) для $z_0(x)$, имеем:

$$\sqrt[3]{x}z_0'(x)=0,\ 0<x<1,\quad z_0(1)=1. \tag{9}$$

Задача (9) имеет единственное решение $z_0(x)=1$. Равенство (7) представимо в виде

$$\begin{gathered}\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)+\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=0}^{5}\mu^k\left(\pi_k''(t)+\sqrt[3]{t}\pi_k'(t)\right)+\\+\sum_{k=0}^{5}\mu^k\left(\frac{2}{\sqrt[3]{t}}\pi_k'(t)-\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\pi_k(t)+\frac{\mu^2}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_k(t)\right)+\\+\varepsilon\left(R''(x,\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}R'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)R(x,\varepsilon)\right)+\sqrt[3]{x}R'(x,\varepsilon)=0,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\left(\frac{\mu^2}{\sqrt[3]{t^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\right)+\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=0}^{5}\mu^k\left(\pi_k''(t)+\sqrt[3]{t}\pi_k'(t)\right)+\\+\sum_{k=0}^{5}\mu^k\left(\frac{2}{\sqrt[3]{t}}\pi_k'(t)-\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\pi_k(t)+\frac{\mu^2}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_k(t)\right)+\\+\varepsilon\left(R''(x,\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}R'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)R(x,\varepsilon)\right)+\sqrt[3]{x}R'(x,\varepsilon)=0,\end{gathered}$$

Отсюда, для пограничных функций $\pi_k(t)$ имеем:

$$L\pi_k\equiv\pi_k''(t)+\sqrt[3]{t}\pi_k'(t)=0,\ 0<t<\tilde\mu,\ k=0,1, \tag{10}$$

$$L\pi_2(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\pi_0(t)-\frac{2}{\sqrt[3]{t}}\pi_0'(t),\ 0<t<\tilde{\mu}, \tag{11}$$

$$L\pi_3(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\pi_1(t)-\frac{2}{\sqrt[3]{t}}\pi_1'(t),\ 0<t<\tilde{\mu}, \tag{12}$$

$$L\pi_4(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\pi_2(t)-\frac{2}{\sqrt[3]{t}}\pi_2'(t)-\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_0(t)-\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}},\ 0<t<\tilde{\mu}, \tag{13}$$

$$L\pi_5(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\pi_3(t)-\frac{2}{\sqrt[3]{t}}\pi_3'(t)-\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_1(t),\ 0<t<\tilde{\mu}, \tag{14}$$

$$\varepsilon\left(R''(x,\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}R'(x,\varepsilon)+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)R(x,\varepsilon)\right)+\sqrt[3]{x}R'(x,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}\Phi(t,\mu)$$

$$R(0,\varepsilon)=0, R(1,\varepsilon)=0, \tag{15}$$

где

$$\Phi(t,\mu)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\pi_4(t)-\frac{2}{\sqrt[3]{t}}\pi_4'(t)-\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_2(t)+$$

$$+\mu\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\pi_5(t)-\frac{2}{\sqrt[3]{t}}\pi_5'-\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_3(t)\right)-\mu^2\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_4(t)-\mu^3\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_5(t).$$

Решения задач (10) имеют вид, соответственно:

$$\pi_0(t)=\left(\frac{a\sqrt{e^3}}{b}-1\right)A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds,\quad \text{где } A=\left(\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds\right)^{-1},$$

$$\pi_1(t)\equiv 0.$$

Очевидно, что $Lz(t)=0$ имеет двух линейно независимых решений

$Y(t)=1-X(t),\ X(t)=A\int_t^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds,\ A\int_0^{\tilde{\mu}}e^{-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds=1$ при этом $\mathrm{Y}(t)=O(t)$ $t\to 0$, $0<\mathrm{X}(t)\leq 1$,

$$X(t)=t^{-\frac{1}{3}}e^{-\frac{3}{4}t^{4/3}}\left(1+\alpha_1 t^{-\frac{4}{3}}+\alpha_2 t^{-\frac{8}{3}}+\ldots+\alpha_n t^{-\frac{4n}{3}}+\ldots\right),\ t\to\tilde{\mu},\alpha_j-const. \tag{16}$$

Поэтому общее решение уравнения $Lz(t)=0$ имеет вид $z(t)=C_1\mathrm{Y}(t)+C_2\mathrm{X}(t)$, C_1, C_2 – const. Отсюда вытекают леммы.

Лемма 1. Краевая задача $Lz(t)=0$, $z(0)=z(\tilde{\mu})=0$ имеет только нулевое решение.

Лемма 2. Задача

$$Lz(t)=f(t),\ 0<t<\tilde{\mu},\ z(0)=0,\ z(\tilde{\mu})=0, \tag{17}$$

имеет единственное решение и оно представимо в виде

$$z(t)=\int_0^{\tilde{\mu}}G(t,s)e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}f(s)ds,$$

где $G(t,s)=\begin{cases}-Y(t)X(s),\ 0\le t\le s,\\ -Y(s)X(t),\ s\le t\le \tilde{\mu},\end{cases}$ – функция Грина задачи (17),

$f(t)\in C(0,\tilde{\mu}],\ f(t)=O(t^{-4/3}), t\to 0.$

Доказательство. Далее, через $l, l_{i,j}$ обозначим постоянные. Решение задачи (17), т.е. функцию $z(t)$ можно представить в виде:

$$z(t)=J_1(t)+J_2(t),$$

где $J_1(t)=-X(t)\int_0^t Y(s)e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}f(s)ds,\ J_2(t)=-Y(t)\int_t^{\tilde{\mu}}X(s)e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}f(s)ds.$

Достаточно доказать, что J_1 и J_2 удовлетворяют граничным условиям.

1) а) Если $t\to 0$ и $|Y(t)|\le lt,\ |f(t)|\le lt^{-4/3}$, то

$$|J_1(t)|\le l\int_0^t s^{-1/3}e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}ds\le l\sqrt[3]{t^2},\ t\to 0.$$

b) $t\to\tilde{\mu}$

$$|J_1(t)|\le lt^{-1/3}e^{-\frac{3}{4}t^{4/3}}\left[\int_0^1|Y(s)|e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}|f(s)|ds+\int_1^t|Y(s)|e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}|f(s)|ds\right]\le$$

$$\le lt^{-1/3}e^{-\frac{3}{4}t^{4/3}}+lt^{-1/3}e^{-\frac{3}{4}t^{4/3}}\int_1^t e^{\frac{3}{4}s^{4/3}}s^{-4/3}ds\le$$

$$\le lt^{-1/3}e^{-\frac{3}{4}t^{4/3}}+lt^{-1/3}\int_1^t s^{-4/3}ds=O(t^{-2/3}),\ t\to\tilde{\mu}$$

2) а) $t\to 0$

$$|J_2(t)|\le lt\left(\int_t^1 s^{-4/3}ds+\int_1^{\tilde{\mu}}s^{-5/3}e^{\frac{3}{4}s^{4/3}-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds\right)=O(\sqrt[3]{t^2}),\ t\to 0.$$

а)) $t\to\tilde{\mu}$: $|J_2(t)|\le l\int_t^{\tilde{\mu}}s^{-1/3-4/3}e^{\frac{3}{4}s^{4/3}-\frac{3}{4}s^{4/3}}ds=O(t^{-2/3}),\ t\to\tilde{\mu}.$

Поэтому $z(t)$ удовлетворяет граничным условиям. Подставляя функцию $z(t)$ в уравнению $Lz(t)=f(t)$, убеждаемся, что она удовлетворяет и уравнению.

Из леммы 2 вытекает существование и единственность решений задач (11)-(14), (8). Заметим, что $\pi_{1,3,5}(t)\equiv 0$.

Лемма 4. Асимптотические разложения решений задач (11), (13) при $t\to\tilde{\mu}$ представимы в виде

$$\pi_2(t)=t^{-2/3}\sum_{j=0}^{\infty}l_{2,j}t^{-\frac{4}{3}j},\quad \pi_4(t)=\ln t+\sum_{j=1}^{\infty}l_{4,j}t^{-\frac{4}{3}j},$$

Из соотношения (16) следует, что $\pi_0(t)$ экспоненциально убывает при $t\to\tilde{\mu}$. Кроме того, $\pi_k(t)=O(\sqrt[3]{t^k}),\ t\to 0, k=0,2,4$.

Лемму 4 можно доказать двумя способами, либо используя лемму 3 и разложение (16), либо прямо из уравнений (11), (13).

Таким образом, мы доказали ограниченность функций $\pi_0(t)$, $\pi_2(t)$ $\mu\pi_4(t)$, $\pi_r(t)\equiv 0, r=1,3,5$ и

$$\Phi(t,\mu)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^4}}\pi_4(t)-\frac{2}{\sqrt[3]{t}}\pi_4'(t)-\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_2(t)-\mu^2\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\pi_4(t)$$

на отрезке [0, $\tilde{\mu}$], когда $\mu\to 0$

Теперь перейдем к оценке остаточного члена. Пусть

$R(x,\varepsilon)=e^{-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}}r(x,\varepsilon)$, тогда задача (15) примет вид:

$$\varepsilon r''(x,\varepsilon)+\sqrt[3]{x}r'(x,\varepsilon)-r(x,\varepsilon)=e^{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}}\varepsilon\Phi(t,\mu),\quad 0<x<1,$$
$$r(0,\varepsilon)=0, r(1,\varepsilon)=0,$$

Пусть $M=\max\limits_{t\in[0,\tilde{\mu}]}\Phi(t,\mu)$, $\mu\to 0$. Применяя теорему 26.4 [8], получаем:

$\left|r(x,\varepsilon)\right|\le\varepsilon Me^{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}}$. Отсюда $\left|R(x,\varepsilon)\right|\le\varepsilon M$, $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$.

Справедлива

Теорема. Для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=be^{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x^2}-1)}(1+\pi_0(t)+\mu^2\pi_2(t)+\mu^4\pi_4(t))+O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0.$$

Заключение.Здесь получено асимптотическое разложение решения задачи (10-(2) только до членов первого порядка по малому параметру. При дальнейшем уточнении асимптотики решения появляются логарифмические члены относительно малого параметра.

Список использованной литературы:

1. Cole J. D. Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publishing, 1968.
2. Kevorkian J., Cole J.D. Perturbation methods in Applied mathematics. Springer, 1980.
3. Kevorkian J., Cole J.D. Multiscale and singular perturbation methods. Springer, 1996.
4. Зулпукаров А.З. Метод структурного сращиваниядля решения краевых задач сингулярно возмущенных уравнений второго порядка. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Ош, 2009.
5. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно-возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Матем. Заметки. – Москва. – 2013. Т. 94, вып. 4. – С. 484-487.
6. Alymkulov K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill’s Model Equation with the regular Singular Point. American J.Math. & Statistics. 2013. vol. 3. No1. pp. 53-61.

7. Alymkulov K., Khalmatov A.A. A boundary function method for solving the model Lighthill equation with a regular singular point // Math. Notes, 2012, Vol. 92, No. 6, pp. 117–121.
8. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 248 с.