УДК 517.54

КОНФОРМДУК ЧАГЫЛТУУНУ ЛАПЛАС ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН КОЮЛГАН ДИРИХЛЕНИН ТЕГЕРЕКТЕГИ МАСЕЛЕСИ ҮЧҮН КОЛДОНУУ
ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КРУГЕ
THE APPLICATION OF THE CONFORMAL MAPPING FOIR THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION IN THE DISK

Таабалдиев С.Ү. – магистр, ОшМУ,
staabaldiev@mail.ru

Аннотация: *Мында тегиздиктеги областты тегерекке конфорттуу чагылтуунун жардамы менен Лаплас теңдемеси үчүн тегеректе коюлган Дирихле маселесинин чечими тургузулат*

Аннотация: *Здесь при помощи конформного отображения строится решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.*

Annotation: *Here it is constructed the solution of the equation of Laplas in a disk for the problem of Dirichle by the conform mapping*

Ачкыч сөздөр: *конформдук чагылтуу, тегеренк, Лаплас теңдемеси, Дирихле маселеси.*

Ключевые слова: *конформное отбражение, верхняя полуплоскость, уравнение Лапласа, задача Дирихле.*

Key words: *conformal mapping, disk, Laplace equation, Dirichlet problem.*

1.Кириш сөз

Конформдук чагылтууну колдонуп Лапластын теңдемеси үчүн коюлган Дирихленин маселесинин тегеректе чечиминин айкын түрүндө алууга колдонулду.

2 Лаплас тендемеси үчүн тегиздикте коюлган Дирихле маселесин конформдук чагылтуу менен чечүү

Бизге Лаплас тендемеси үчүн

$$\Delta u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

$\mathscr{D}(a) = \{z : |z| > a\}$ тегерегинде Дирихле маселеси берилсин:б.а. бул тегеректе (1) тендемени канааттандырган жана чек арасында

$$\Gamma = \{z : |z| = a\} \Leftrightarrow x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi \quad \text{болгондо}$$

$$u(x = a\cos\varphi, y = \sin\varphi) = f(\varphi)$$

мында $f(\varphi)$ - үзгүлтүксүз функция, $0 \le \varphi \le 2\pi$ болгондо биз (1) тендеме полярдык координата системасына

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

өтсөк, анда

$$\Delta U = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

мында $\tilde{u}(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Теорема (1) (Пуассон). Мейли $u(z)$- функциясы $|z|<a$ тегерегинде гармоникалык функция болуп жана $|z|\le a$ да үзгүлтүксүз функция болсун, анда (1)-(2) маселенин чечими

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ra\cos(\varphi-\theta)+r^2}u(ae^{i\theta})d\theta \tag{3}$$

мында $z=re^{i\varphi}$, $\quad 0\le r<a$.

Далилдөө: Эгерде $z=0$ болсо анда

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(ae^{i\theta})d\theta \tag{4}$$

бул гармоникалык функциянын тегеректин ичиндеги орточо мааниси жөнүндө теорема боюнчаалынат. Чынында эле (1с) Кошинин интералдык формуласы боюнча.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_r\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \tag{5}$$

мында $r=\{\xi:|\xi|=a.$Андыктан $\quad \xi=ae^{i\varphi},\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\qquad d\xi=aie^{ie}d\varphi$

(5) тен

$$f(0)=\frac{ia}{2\pi}\int_{|z|=a}\frac{f(ae^{ie}}{ae^{ie}}e^{ie}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(ae^{ie})d\varphi$$

эми $z\ne 0$ болсо дагы $u(z)$ тин мааиси конформдук чагылтуу менен функциянын орточо мааниси жөнүндөгү теореманын жардамы менен алууга болот. $|z|<a$ тегеректеги $z_0=z_0e^{i\varphi_0}$, $0\le r_0<1-$ чекитин алалы жана r тегиздигин $\xi=\xi+i\eta-$ тегиздигинде конформдук чагылтууну

$$\xi=h(z)=\lambda\frac{z-z_0}{z-\dfrac{a^2}{\overline{z}_0}}=\lambda\frac{z-r_0e^{i\varphi}}{z-\dfrac{a^2e^{i\varphi_0}}{r_0}},\lambda=\frac{a}{r_0} \tag{7}$$

мында $z^*{}_0=\dfrac{a^2}{\overline{z}_0}-чекит\ z_0-$го симметриялуу чекит , $\lambda=ae^{i\varphi}$

(7) ден z ти тапсак

$$z=g(\xi)=\frac{\xi a^2+\lambda z_0}{\xi\overline{z}_0+\lambda} \tag{8}$$

бул функция $|\xi|<1$ тегерегин$|z|<a$ тегерегине конформдук чагылтат. Функция $g(\xi)$ $|\xi|<1$ тегергинде гармоникалык функция $u=u(g(\xi))-$гармоникалык функция $|\xi|<1$ болгондо мурдагы параграфтын жана гармоникалык функциянын орточо мааниси жөнүндөгү тендеменин негизинде

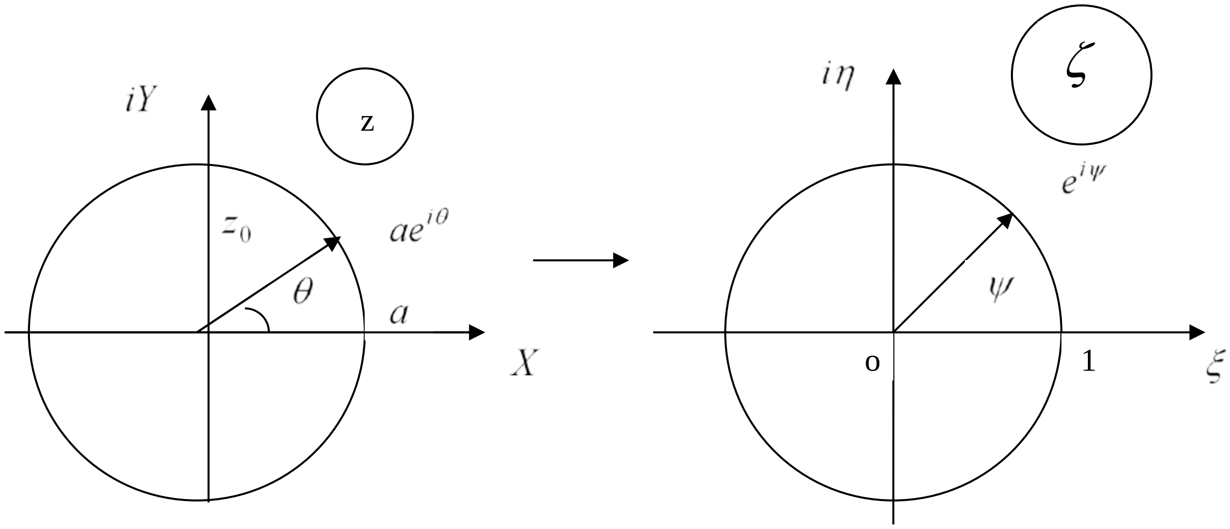
$$u(z_0) = \tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{i\psi})2\psi \qquad (9)$$

баштапкы $z -$ өзгөрмөсүнө кайрылабыз, б.а. (9)-дан

$$e^{i\psi} = h(ae^{i\theta}) = \lambda\frac{ae^{i\theta} - z_0}{a^2 - ae^{i\theta}\bar{z}_0} = \frac{\lambda}{a}\frac{ae^{i\theta} - z_0}{a - e^{i\theta}\bar{z}_0} \qquad (10)$$

өзгөртүүсүн келтиребиз, себеби $z -$тегиздигинде $z = ae^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ айланасы $\xi -$тегиздигиндеги $\xi = e^{i\psi} -$ (бирдик айланасына) жана

$$\tilde{u}(e^{i\psi}) = \tilde{u}(h(ae^{i\theta})) = u(ae^{i\theta})$$



(10) ду дифференциялдаган

$$ie^{i\psi}d\psi = \frac{\lambda}{a}\frac{iae^{i\theta}(a^{\theta} - e^{i\theta}\bar{z}_0) + (ae^{i\theta} - z_0)ai\bar{z}_0e^{i\theta}}{(a - e^{i\theta}\bar{z}_0)^2}d\theta = \frac{i\lambda}{a}\frac{e^{i\theta}(a^2 - |z_0|^{2)}}{(a - e^{i\theta}\bar{z}_0)^2}$$

же

$$d\psi = \frac{e^{i\theta}(a^2 - |z_0|^2)}{(a - e^{i\theta}z_0)^2}\frac{(a - e^{i\theta}\bar{z}_0)}{(ae^{i\theta} - z_0)}d\theta = \frac{a^2 - |z_0|^2}{(a - e^{i\theta}\bar{z}_0)(a - z_0e^{i\theta})} \qquad (11)$$

(11) де $z_0 = z_0e^{i\varphi_0}$, $\bar{z}_0 = r_0e^{-i\varphi}$ экендигин эске лаып акырында r_0 ду r ге алмаштырып (11) дифференцирленүүчү (9) га коюп, (3)- формуланы алабыз.

(3)- Пуассондун формуласын өзгөртүп жазабыз

$$\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ra\cos(\varphi - \theta) + r^2} = \frac{a - |z|^2}{|ae^{i\theta} - z|^2} = \mathrm{Re}\frac{ae^{i\theta} + z}{ae^{i\theta} - z} \qquad (12)$$

түрүндө жазса болот чынында эле

$$z = re^{i\varphi}, \qquad \frac{ae^{i\theta} - re^{i\varphi} = a\cos\theta - r\cos\varphi + (a\sin\theta - r\sin\varphi)i}{ae^{i\theta} - re^{i\varphi} = a\cos\theta - r\cos\varphi - i(a\sin\theta - r\sin\varphi)}$$

$$|ae^{i\theta}-z|^2=(a\cos\theta-r\cos\varphi)^2+(a\sin\theta-r\sin\varphi)^2=$$
$$=a^2-2ra(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)+r^2=a^2-2ra\cos(\varphi-\theta)+r^2 \quad (13)$$

$$(ae^{i\theta}+z)(\overline{ae^{i\theta}-z})=[a\cos\theta-r\cos\varphi+i(a\sin\theta-r\sin\varphi)][a\cos\theta-$$
$$-r\cos\varphi-(a\sin\theta-r\sin\varphi)]=a^2\cos^2\theta-ar\cos\theta\cos\varphi+$$
$$+ra\cos\varphi\cos\theta-r^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\theta-ar\sin\theta\sin\varphi+ \quad (14)$$
$$+ra\sin\theta\sin\varphi-r^2\sin^2\varphi+if(0,4)]=a^2-r^2if(0,4)$$

(13) жана (14) төн (12) келип чыгат.

Демек,(3) – формуланы

$$u(z)=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}u(e^{i\theta})d\theta \quad (15)$$

түрүндө жазууга болот, себеби $u(e^{i\theta})$ - чыныгы функция (15) те

$ae^{i\theta}=\xi$ - десек, $aid\theta e^{i\theta}=d\xi$ же $d\theta=\frac{d\xi}{ai\xi}$ болгондуктан (15) ти

$u(z)=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi ai}\int_{|\xi|=a}\frac{\xi+z}{\xi-z}\frac{d\xi}{\xi}$, $|\xi|<a$ деп жазса да болот.

Бул иште Лаплас тендемеси үчүн коюлган жогорку жарым тегиздиктеги Дирихле маселесинин чечимин конформдук чагылтуу менен айкын алынды.

Колдонулган адабияттардын тизмеси:

1. Гурвиц А. Курянт Р. Теория функций. Москва, Наука, 1968
2. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. Методы решений функций коплексного переменного- Москва , Наука, 1988.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В, Шабунин М.И. Лекции по теории функции комплексного переменного. Москва, Наука, 1989.
4. Berenstein C.A., Gay R. Complex variables,Springer-Verlag,1991.
5. Freitag E.,Busam R. Complex Analysis. Springer, 2009.
6. Marsden J.E., Hoffman J.M. Basic Complex Analysis, W.H.Freeman & Co Ltd. , 1998