

ТЕГИЗДИКТЕГИ ОБЛАСТТЫ ТЕГЕРЕККЕ ЧАГЫЛТУУ ЖАНА АНЫН
КОЛДОНУЛУШУ
ОТОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ НА КРУГ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ
MAPPING OF PLANAR DOMAINS
TO A CIRCLE AND ITS APPLICATION

Мамат кызы Г. – магистр, ОшМУ
gulzat.mamatkyzy@mail.ru

Аннотация: Мында тегиздиктеги областты тегерекке конформтуу чагылтуунун жардамы менен Лаплас теңдемеси үчүн жогорку жарым тегиздикте коюлган Дирихле маселесинин чечими тургузулат

Аннотация: Здесь при помощи конформного отображения строится решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхней плоскости.

Annotation: Here, using a conformal mapping, we construct a solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in the upper plane.

Ачкыч сөздөр: конформдук чагылтуу, жогорку жарым тегиздик, Лаплас теңдемеси, Дирихле маселеси.

Ключевые слова: конформное отображение, верхняя полуплоскость, уравнение Лапласа, задача Дирихле.

Key words: conformal mapping, upper half-plane, Laplace equation, Dirichlet problem.

1. Кириш сөз

Математика теоремаларды далилдөөнүн үч жалпы усулу бар: математикалык толук индукция усулу; тескерисинен далилдөө усулу; редукция же мурдагыга алып келүү усулу же кыскача өзгөртүү усулу.

Булардын ичинен эң универсалдуу усул өзгөртүү усулу. Математика илими табияттын закондорун математиканын тилине өзгөртүп жазуу деп түрүндөүшүнсө болот. Математика илиминин ичинде эң татынакай, эң кызыктуу, күчтүү бөлүгү болуп аналитикалык функциялар теориясы болуп эсептелинет. Мунун ичинде бир областы экинчи областка конформдук чагылтуу өтө кызыктуу маселе болуп саналат, себеби бул маселенин гидродинамикада, кванттык механикада ж.б. областарда чоң колдонулушка ээ, математиканын өзү үчүн да чоң ролу бар.

Бул иште жарым тегиздикти тегиздикке конформдук чагылтуу, тегеректи тегерекке конформдук чагылтуунун формулалары келтирилди. Андан соң бул формулалар Лаплас теңдемеси үчүн коюлган Дирихле маселесинин чечиминин айкын түрүндөүрүн алууга колдонулду. Ошондой эле комплекстүү функциялардын теориясынын конформдук чагылтуу үчүн керек болгон теориялар да келтирилди.

2. Жарым тегиздиктеги Лаплас теңдемеси үчүн Дирихле маселеси

Эми

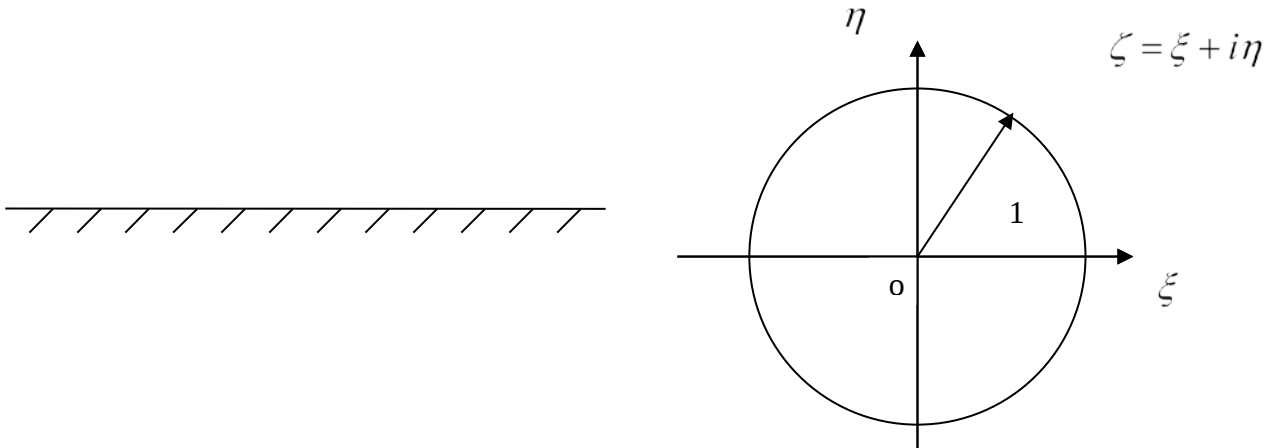
$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1)$$

теңдемеси үчүн жогорку жарым тегиздиктеги ($z > 0$)

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2)$$

белгилүү үзгүлтүксүз функция, болгон чечимин табуу керек

$$z_0 = x_0 + iy_0, y_0 > 0$$



Биз жогорку жарым тегиздикти ($\text{Im} z > 0$) $|\xi| < 1$ тегиздигине чагылтабыз, ал чагылтуу ξ формула

$$\xi = h(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (h(z_0) = 0) \quad (3)$$

формуласы менен туюнтулат. (3) төн

$$z = g(\xi) = \frac{\xi \bar{z}_0 - z_0}{\xi - 1} \quad (4)$$

$z = g(\xi)$ – функциясы $|\xi| < 1$ тегерегин $\text{Im} z > 0$ жарым тегиздигине чагылтат жана $g(0) = z_0$. Анда $\tilde{u}(\xi) = u(g(\xi))$ – функциясы $|\xi| < 1$ тегиздигине гармоникалык функция. Андыктан гармоникалык функциянын орточо мааниси жөнүндөгү теорема боюнча

$$u(z_0) = \tilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{i\psi}) d\psi \quad (5)$$

ξ ден z өзгөрмөсүнө кайрылабыз. (3) формуладан

$$e^{i\psi} = h(t) = \frac{t - z_0}{t - \bar{z}_0} \quad (6)$$

$$\tilde{u}(e^{i\psi}) = \tilde{u}(h(t)) = u(t)$$

(6) ны туундулап,

$$\begin{aligned} ie^{i\psi} d\psi &= \frac{(t - \bar{z}_0) - (t - z_0)}{(t - \bar{z}_0)^2} dt = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(t - \bar{z}_0)^2} \\ d\psi &= \frac{1}{i} e^{-i\psi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(t - \bar{z}_0)^2} = \frac{1}{i} \frac{(z_0 - \bar{z}_0)}{(t - \bar{z}_0)^2} \cdot \frac{t - z_0}{t - z_0} = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{i(t - \bar{z}_0)(t - z_0)} = (z_0 = x_0 + iy_0) = \\ &= \frac{2y_0}{|t - \bar{z}_0|^2} = \frac{2y_0}{(t - \bar{z}_0)^2 + y_0^2} \end{aligned}$$

$z_0 = x_0 + iy_0$ – каалаган чекит болгондуктан (5)- формула

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y_0 f(t)}{(t - x_0)^2 + y_0^2} dt, \quad \text{же}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t)dt}{(t - x)^2 + y^2}. \quad (7)$$

Мындан

$$\frac{y}{(t - x)^2 + y^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{i(t - z)}$$

болгондуктан (7) ни

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{(t - z)} dt$$

деп жазса болот.

(7) же (8) формулалар менен Лаплас тендемеси үчүн коюлган Дирихле маселесин чечсе болот $\operatorname{Re} z > 0$ болгон учурда.

Мисал. Мейли бизге төмөнкү

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & y > 0 \\ u_{y=0} = R(x) \end{cases}$$

Маселе берилсин, мында $R(z)$ - рационалдык функция жана чыныгы окто полюсу жок жана $R(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty$. (8) формула боюнча

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(t)}{t - z} dt, \quad (\operatorname{Im} z > 0) \quad (9)$$

Бул интегралды төмөндөгүдөй чыгарса болот

$$u(z) = -2 \operatorname{Re} \sum_{\operatorname{Im} \xi_k < 0} \operatorname{res}_{\xi = \xi_k} \frac{R(\xi)}{\xi - z} \quad (10)$$

мында $\operatorname{Im} \xi < 0$ тегиздигинде жаткан бардык $R(z)$ – функциясынын туундусу боюнча алынат

Мисал:

$$\Delta u = 0, \quad y > 0,$$

$$u(x, y)_{y=0} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(10) формула боюнча

$$u(z) = -2 \operatorname{Re} \operatorname{Res} \frac{1}{(1 + \zeta^2)(\zeta - z)} = -2 \operatorname{Re} \frac{1}{2i(z + i)} = \frac{y + 1}{x^2 + (y + 1)^2}$$

Тыянак

Бул иште Лаплас тендемеси үчүн коюлган жогорку жарым тегиздиктеги жана тегеректеги Диргихле маселесинин чечимдери конформдук чагылтуу менен ачык-айкын алынды.

Колдонулган адабияттардын тизмеси:

1. Гурвиц А. Курянт Р. Теория функций. Москва наука 1968
2. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. Методы решений функций комплексного переменного- Москва , наука, 1988
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В, Шабунин М.И. Лекции по теории функции комплексного переменного. Москва, наука, 1989