УДК 514.75

СУЩЕСТВОВАНИЕ ДВОЙНОЙ ЛИНИИ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДАЕМОГО ЗАДАННОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СЕТЬЮ ФРЕНЕ
ФРЕНЕНИН БЕРИЛГЕН ЦИКЛДИК ТОРЧОСУ ТАРАБЫНАН ЖАРАТЫЛГАН ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИКТИ БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУНУН КОШМОК СЫЗЫГЫНЫН ЖАШАШЫ
EXISTENCE OF DOUBLE LINE OF A PARTIAL MAPPING OF EUCLIDEAN SPACE, GENERATED BY GIVEN CYCLE NET FRENET

Жаныбек уулу М. – ОшГУ,
muha000194@gmail.com

Аннотация: *В области $\Omega \subset E_4$ рассматривается циклическая сеть Френе $\tilde{\Sigma}_4$. На касательной $\left(X,\vec{e}_1\right)$ к линии ω^1 этой сети инвариантным образом определяется точка (псевдо фокус) F_1^4. Когда точка $X \in \Omega$ смешается в области Ω, точка F_1^4 описывается свою область $\Omega_1^4 \subset E_4$. Получается частичное отображение $f : \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $f\left(x\right) = F_1^4$.*

Найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линия l, принадлежащая распределению $\Delta_3 = \left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$, являлась двойной линий частичного отображения $f : \Omega \to \Omega_1^4$.

Аннотация: *Евклиддик $\tilde{E}_4$ мейкиндигинин Ω аймагында Френенин циклдик торчосу $\tilde{\Sigma}_4$ каралат. Анын ω^1 сызыгынын $\left(X,\vec{e}_1\right)$ жанымасында инварианттык түрдө F_1^4 чекити (псевдофокус) аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде F_1^4 чекити өзүнүн Ω_1^4 аймагын сызып чыгат. Ошентип $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ бөлүктөп чагылтуусу аныкталат: $f_1^4\left(x\right) = F_1^4$.*
$\Delta_3 = \left(X,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон l сызыгынын ушул чагылтуунун кошмок сызыгы болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген.

Annotation: *In domain $\Omega \subset E_4$ it is considered a cycle net of Frenet $\tilde{\Sigma}_4$. There is exist the point (pseudo focus) F_1^4 on the tangent $\left(X,\vec{e}_1\right)$ of the line ω^1 of the $\tilde{\Sigma}_4$ by invariant manner. When the point X is shifted in the domain Ω, the point F_1^4 describes it's domain $\Omega_1^4 \subset E_4$. In this way defined the partial mapping $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ such that $f_1^4\left(x\right) = F_1^4$.*

Necessary and sufficient conditions conditions in orter that the line l belonging to distribution $\Delta_3 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right)$ *is double line of the partial mapping* f_1^4.

Ключевые слова: *распределение, циклическая сеть Френе, частичное отображение, псевдофокус.*

Ачкыч сөздөр: *Френенин циклдик торчосу, псевдофокус, бөлүштүрүү, кошмок сызык.*

Key words: *partial mapping, cyclic net of Frenet, Frenet frame, pseudofocus, Euqlidear space.*

В области Ω евклидова пространства E_4, задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормированный репер $\Re = \left(X, \vec{e}_i \right)$ $\left(i, j, k = 1,2,3,4 \right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1], [2] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_4^0 для линии ω^1 заданного семейства. Поскольку репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Σ_4^0, формы ω_i^k становятся главными, т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом равенство (3):

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Применяя формул (2) отсюда имеем:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^l \wedge \omega_l^j.$$

В силу равенства (3) последнее равенство имеет вид:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{jl}^k \omega^l = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_l^j \wedge \omega^l$$

или

$$\Lambda_{jl}^k \omega_i^j \wedge \omega^l = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \wedge \omega_l^j \wedge \omega^l.$$

Отсюда найдем:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{il}^k \omega_j^l \wedge \omega^j - \Lambda_{jl}^k \omega_i^j \wedge \omega^l = 0$$

или

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{il}^k \omega_j^l - \Lambda_{lj}^k \omega_i^l \right) \wedge \omega^j = 0.$$

Применяя лемму Картана [67] отсюда имеем:

$$d\Lambda_{ij}^{k} - \Lambda_{il}^{k}\omega_{j}^{l} - \Lambda_{lj}^{k}\omega_{i}^{l} = \Lambda_{ijm}^{k}\omega^{m}$$

или

$$d\Lambda_{ij}^{k} = B_{ijm}^{k}\omega^{m}, \tag{5}$$

где $B_{ijm}^{k} = \Lambda_{ijm}^{k} + \Lambda_{il}^{k}\Lambda_{jm}^{l} + \Lambda_{lj}^{k}\Lambda_{im}^{l}$.

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^{k}, \Lambda_{ijm}^{k}\right\}$ образуют геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе для линии ω^1 заданного семейства имеют вид:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^{2}\vec{e}_2,$$
$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^{1}\vec{e}_1 + \Lambda_{21}^{3}\vec{e}_3,$$
$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^{2}\vec{e}_2 + \Lambda_{31}^{4}\vec{e}_4,$$
$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^{3}\vec{e}_3$$

и

$$\Lambda_{11}^{3} = -\Lambda_{31}^{1} = 0, \; \Lambda_{11}^{4} = -\Lambda_{41}^{1} = 0, \tag{6}$$
$$\Lambda_{21}^{4} = -\Lambda_{41}^{2} = 0. \tag{7}$$

Здесь $k_1^1 = \Lambda_{11}^{2}$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^{3}$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^{4}$ - первая, вторая и третья кривизны линии ω^1 соответственно (где d_1 - символ дифференцирования вдоль линии ω^1).

Псевдофокус [5] $F_i^{\,j}$ $(i \neq j)$ касательной к линии ω^i сети $\tilde{\Sigma}_4$ определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^{\,j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^{j}}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^{i}}\vec{e}_i. \tag{8}$$

На каждой касательной $(X, \vec{e}_i)$ существуют по три псевдофокуса. На прямой $(X, \vec{e}_1)$ существуют псевдофокусы F_1^2, F_1^3, F_1^4, на прямой $(X, \vec{e}_2)$ – F_2^1, F_2^3, F_2^4, на прямой $(X, \vec{e}_3)$ – F_3^1, F_3^2, F_3^4, на прямой $(X, \vec{e}_4)$ – F_4^1, F_4^2, F_4^3.

Сеть $\tilde{\Sigma}_4$ в $\Omega \subset E_4$ называется циклической сетью Френе [48], если реперы $\Re_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, $\Re_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1)$, $\Re_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\Re_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ являются соответственно реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 сети $\tilde{\Sigma}_4$ одновременно.

Пусть сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе.

Псевдофокус $F_1^4 \in (X, \vec{e}_1)$ определяется радиус-вектором:

$$\vec{F}_1^{4} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{14}^{4}}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{44}^{1}}\vec{e}_1, \tag{9}$$

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_4$, псевдофокус F_1^4 описывает свою область $\Omega_1^4 \subset E_4$. Определяется частичное отображение $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $f_1^4(X) = F_1^4$.

Так как заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе, векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B^4_{141}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\right]_i \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{11}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2;\\
&\vec{b}_2 = \frac{B^4_{142}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^4_{12}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_4;\\
&\vec{b}_3 = \frac{B^4_{143}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2 - \frac{\Lambda^4_{13}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_4 + \vec{e}_3;\\
&\vec{b}_4 = \frac{B^4_{144}}{\left(\Lambda^4_{14}\right)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{14}}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_2.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

В общем случае эти векторы в общем случае линейно независимы, следовательно, частичное отображение $f_1^4 : \Omega \to \Omega_1^4$ является невырожденным.

Определение: Линии $\omega^i, f(\omega^i) = \overline{\omega}^i$ называются двойными линиями отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f(X)$ пересекаются, либо параллельны [15].

Рассмотрим линию l, принадлежащую $\Delta_3 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$. Её касательный вектор $\vec{l}$ имеет вид: $\vec{l} = l^1\vec{e}_1 + l^2\vec{e}_2 + l^3\vec{e}_3$. Найдем касательный вектор $\vec{\bar{l}}$ линии $f_1^4(l) = \bar{l}$. Его ищем в виде: $\vec{\bar{l}} = l^1\vec{a}_1 + l^2\vec{a}_2 + l^3\vec{a}_3$.

Учитывая (10) отсюда имеем:

$$\vec{\bar{l}} = l^1\left(+\hat{a}^2_1\vec{e}_2\right) + l^2\left(\hat{a}^1_2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \hat{a}^4_2\vec{e}_4\right) + l^3\left(\hat{a}^1_3\vec{e}_1 + \hat{a}^2_3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \hat{a}^4_3\vec{e}_4\right)$$

(где $\hat{a}^j_i$ - j-тая координата вектора $\vec{a}_i$) или

$$\vec{\bar{l}} = \left(l^1\hat{a}^1_1 + l^2\hat{a}^1_2 + l^3\hat{a}^1_3\right)\vec{e}_1 + \left(l^1\hat{a}^2_1 + l^2 + l^3\hat{a}^2_3\right)\vec{e}_2 + l^3\vec{e}_3 + \left(l^2\hat{a}^4_2 + l^3\hat{a}^4_3\right)\vec{e}_4$$

Из условия $\vec{l}, \vec{\bar{l}}, \overrightarrow{XF_1^4} = -\frac{1}{\Lambda^4_{14}}\vec{e}_1 \in \Delta_3$

получим $l^2\hat{a}^4_2 + l^3\hat{a}^4_3 = 0$

или $$\frac{l^2}{l^3} = -\frac{\hat{a}_3^4}{\hat{a}_2^4} \qquad (11)$$

учитывая (10) отсюда имеем:

$$\frac{l^2}{l^3} = -\frac{\wedge_{13}^4}{\wedge_{12}^4} \qquad (12)$$

Обратно , если имеет место (12), то линия γ, принадлежащая распределению $\Delta_3 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right)$ является двойной линией частичного отображения f_1^4. Таким образом доказана

Теорема: Линия l, принадлежащая распределению Δ_3, является двойной линией частичного отображения f_1^4 тогда и только тогда, когда координаты l^2, l^3 её касательного вектора $\vec{l}$ удовлетворяли условию (12).

Список использованной литературы:

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст] / П.К. Рашевский // Москва, Наука, 1967. – С. 481-482.
2. Силаева Г.М. Двойные линии отображения и их гиперсферическое изображение [Текст] / Г.М. Силаева // Дифференциальная геометрия много-образий фигур. Вып. 19. – Калининград: КГУ, 1988. – С. 82-84.
3. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве [Текст] / В.Т. Базылев // Литовский математический сборник, 1966.VI. - №4. – С. 475-491.
4. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства [Текст] / Г. Матиева // Монография. – Ош, 2003. – С. 212-219.
5. Папиева Т.М. Циклическая сеть Френе в четырехмерном евклидовом пространстве [Текст] / Т.М. Папиева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 40. – Бишкек: Илим, 2009. – С. 294-298.