УДК 517.918

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_3, ПОРОЖДАЕМОГО ЗАДАННОЙ СЕТЬЮ ФРЕНЕ

БЕРИЛГЕН ФРЕНЕНИН ТОРЧОСУ ТАРАБЫНАН ЖАРАТЫЛГАН ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИКТИ БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУ ЖӨНҮНДӨ

ABOUT A PARTIAL MAPPING OF EUCLIDEAN SPACE E_3, GENERATED BY GIVEN NET FRENET

Батырова А.Ш. – ОшГУ,
ssh.salieva.adm@mail.ru

Аннотация: *В области* Ω *евклидова трехмерного пространства* E_3 *задана сеть Френе* Σ_3 *[1]. На касательной*

Key words: *distribution, Euclidean space, minimal distribution, vector of mean curvature.*

Пусть в области Ω евклидова трехмерного пространства E_3 задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. Область $\Omega \subset E_3$ отнесем к подвижному ортонормированному реперу $\Re = (X, \vec{e}_i)$ (i,j,k=1,2,3), который является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \qquad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j.$$

Дифференциальные формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad D\omega_i^k = \omega_i^l \wedge \omega_l^k, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i \neq k)$$

Интегральные кривые ω^i векторных полей $\vec{e}_i$ определяют в области Ω ортогональную сеть Френе Σ_3, называемую сетью Френе. Все формы ω_i^j главные [1], так как репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Френе Σ_3:

$$\omega_i^j = \Lambda_{ik}^j \omega^j \tag{1}$$

где

$$\Lambda_{ik}^j = -\Lambda_{jk}^i. \tag{2}$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (1) и применяя лемму Картана, получим

$$d\Lambda_{ik}^j - \Lambda_{il}^j \omega_k^l - \Lambda_{lk}^j \omega_i^l = \Lambda_{ikm}^j \omega^m \qquad (\Lambda_{ikm}^j = \Lambda_{imk}^j) \quad \text{или}$$

$$d\Lambda_{ik}^j = (\Lambda_{ikm}^j + \Lambda_{il}^j \Lambda_{km}^l + \Lambda_{lk}^j \Lambda_{im}^l)\omega^m. \tag{3}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ik}^j, \Lambda_{ikm}^j\right\}$ определяет геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе [2] для линии ω^1 имеют вид:

$$d_1\vec{X} = \vec{e}_1, \; (ds = \omega^1), \qquad d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2, \tag{4}$$

$$d_1\vec{e}_2 = -\Lambda_{11}^2 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3, \qquad d_1\vec{e}_3 = -\Lambda_{21}^3 \vec{e}_2,$$

где $k_1 = \Lambda_{11}^2$ - кривизна, $\chi_1 = \Lambda_{21}^3$ - кручение этой линии ω^1.

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$, определяемый радиус-вектором

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2} \vec{e}_3. \tag{5}$$

Дифференцируем это равенство и, учитывая деривационные формулы имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{32}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2} \vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2} \omega_3^k \vec{e}_k.$$

Из (3) получим

$$d\Lambda_{32}^{2} = \left(\Lambda_{32m}^{2} + \Lambda_{3l}^{2}\Lambda_{2m}^{l} + \Lambda_{l2}^{2}\Lambda_{3m}^{l}\right)\omega^{m} \ .$$

Введем обозначение $C_{32m}^{2} = \Lambda_{32m}^{2} + \Lambda_{3l}^{2}\Lambda_{2m}^{l} + \Lambda_{l2}^{2}\Lambda_{3m}^{l}$. Тогда имеем $d\Lambda_{32}^{2} = C_{32m}^{2}\omega^{m}$. Учитывая это вектор $d\overrightarrow{F_3^2}$ напишем в виде

$$d\overrightarrow{F_3^2} = \omega^{i}\vec{c}_i + \frac{C_{32m}^{2}\omega^{m}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}}\overrightarrow{e_3} - \frac{1}{\Lambda_{32}^{2}}\Lambda_{3m}^{k}\omega^{m}\overrightarrow{e_k}.$$

Учитывая, что $\Lambda_{31}^{1} = 0$ и $\omega_i^i = 0$, отсюда получим

$$d\overrightarrow{F_3^2} = \omega^{1}\left[\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{31}^{2}}{\Lambda_{32}^{2}}\overrightarrow{e_2} - \frac{C_{321}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}}\overrightarrow{e_3}\right] + \omega^{2}\left[-\frac{\Lambda_{32}^{1}}{\Lambda_{32}^{2}}\overrightarrow{e_1} + \frac{C_{322}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}}\overrightarrow{e_3}\right] +$$

$$+\omega^{3}\left[-\frac{\Lambda_{33}^{1}}{\Lambda_{32}^{2}}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda_{33}^{2}}{\Lambda_{32}^{2}}\overrightarrow{e_2} + \frac{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2} + C_{323}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}}\overrightarrow{e_3}\right].$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \vec{c}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^{2}}{\Lambda_{32}^{2}}\vec{e}_2 + \frac{C_{321}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}}\vec{e}_3, \\ \vec{c}_2 &= -\frac{\Lambda_{32}^{1}}{\Lambda_{32}^{2}}\vec{e}_1 + \frac{C_{322}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}}\vec{e}_3, \\ \vec{c}_3 &= -\frac{\Lambda_{33}^{1}}{\Lambda_{32}^{2}}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{33}^{2}}{\Lambda_{32}^{2}}\vec{e}_2 + \frac{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2} + C_{323}^{2}}{\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2}}\vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Эти формулы были найдены в работе [3].

Тогда последнее равенство имеет вид $d\overrightarrow{F_3^2} = \omega^{i}\vec{c}_i$.

Когда точка X смещается в области Ω, точка F_3^2 описывает свою область Ω_3^2. Таким образом, определено отображение $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f(X) = F_3^2$. Область Ω_3^2 отнесем к подвижному реперу $\vec{\Re} = \left(F_3^2, \vec{c}_i\right)$.

Интегральные линии векторных полей $\vec{c}_i$ образуют сеть $\vec{\Sigma}_F = f\left(\Sigma_F\right)$. Найдем необходимое и достаточное условия ортогональности этой сети $\vec{\Sigma}_F$. Пусть сеть $\vec{\Sigma}_F$ ортогональна, тогда векторы $\vec{c}_i$ попарно ортогональны. Из условия ортогональности векторов $\vec{c}_i$ имеем:

$$\Lambda_{32}^{1}\left\{\left[\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2} + C_{323}^{2}\right]\Lambda_{32}^{2} + C_{321}^{2}\Lambda_{33}^{1}\right\} = 0.$$

Возможны два случая:

1) $\Lambda_{32}^{1} = 0$;

2) $\left[\left(\Lambda_{32}^{2}\right)^{2} + C_{323}^{2}\right]\Lambda_{32}^{2} + C_{321}^{2}\Lambda_{33}^{1} = 0$.

Доказана

Теорема. Сеть