УДК 514.75

О СВОЙСТВЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЧЕТЫРМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНТСВА
ТӨРТ ЧЕНЕМДҮҮ ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИКТЕГИ ЭКИ ЧЕНЕМДҮҮ БЕТТЕРДИ ЧАГЫЛТУУНУН КАСИЕТИ ЖӨНҮНДӨ
ABOUT PROPERTY OF A MAPPING OF 2-DIMENSIONAL SURFACES OF 4-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Акылбек уулу Н. – ОшГУ,
akylbekuulu.n@mail.ru

Аннотация: *В четырехмерном евклидовом пространстве рассмотрено отображение двухмерных поверхностей*
$f:\Phi\rightarrow\Phi',\ \forall x\in\Phi\quad f(x)=Y\in\Phi'$

Найдены необходимое и достаточное условия минимальности образа поверхности Φ в отображение f.

Аннотация: *Төрт ченемдүү евклиддик* E_4 *мейкиндигинде эки ченемдүү* Φ *жана* Φ' *беттерин чагылтуу каралган.*

Ушул чагылтуудагы Φ бетинин элесинин минималдык болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары табылган.

Annotation: *It is considered a mapping of 2-dimensional surfaces Φ and Φ' in 4-dimensional Euclidean space* E_n*:* $f:\Phi\rightarrow\Phi',\ \forall x\in\Phi\quad f(x)=Y\in\Phi'$.

Necessary and sufficient conditions of minimality of the emage of the surface Φ in the mapping f are found.

Ключевые слова: *распределение, евклидово пространство, минимальное распределение, отображения.*

Ачкыч сөздөр: *бөлүштүрүү, евклиддик мейкиндик, минималдык бөлүштүрүү, чагултуу.*

Key words: *distribution, Euclidean space, minimal distribution, vector of mean curvature.*

В четырехмерном евклидовом пространстве E_4, отнесенном к ортонор-мированной системе координат $\Re=\{O,\vec{J}_i,\vec{J}_\alpha\}$ $(i,j,k=1,2;\ \alpha,\beta,\gamma=3,4)$, задана двумерная поверхность Φ:

$$\vec{X}=x^a(u^1,u^2)\vec{J}_a \qquad (a,b,c=1,2,3,4).$$

Функции $x^a(u^1,u^2)$ предполагаются достаточно высокого класса дифференцируемости. Присоединим к поверхности Φ подвижной ортонормированный репер $\Re=\{X,\vec{e}_a\}$, где орты $\vec{e}_i$ принадлежат касательной двумерной плоскости $T_2(X)$ к поверхности Φ в точке X, а вектор $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_2(X)$ касательной плоскости $T_2(X)$.

Деривационные формулы такого репера имеют вид:

$$d\vec{X}=\omega^i\vec{e}_i,\ \ d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\ \ d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^j\vec{e}_j+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta. \tag{1}$$

Уравнение поверхности Φ в этом репере запишется в виде: $\omega^{\alpha} = 0$. Дифференцируя внешним образом последнего равенства и применяя лемму Картана [1] получим:

$$\omega_i^{\alpha} = b_{ij}^{\alpha} \omega^j , \quad b_{ij}^{\alpha} = b_{ji}^{\alpha} . \tag{2}$$

Как известно, функции b_{ij}^{α} для каждого фиксированного α образуют дважды ковариантный симметрический тензор. Мы имеем систему двух вторых основных тензоров b_{ij}^{α} поверхности Φ.

Дифференцируя тождество $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, получим:

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 . \tag{3}$$

Аналогично, дифференцируя тождество $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_{\alpha} = 0$ имеем:

$$\omega_i^{\alpha} + \omega_{\alpha}^i = 0 . \tag{4}$$

Пусть в некоторой области $\Omega \subset \Phi$ задана ортогональная сеть Σ_2. Векторы $\vec{e}_i$ подвижного репера $\Re$ расположим на касательных в точке X к линиям данной сети. Тогда формы ω_i^j $\left(i \neq j\right)$ главные [2]:

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k , \tag{5}$$

где a_{ik}^j – инварианты сети.

Пусть Φ' другая гладкая двумерная поверхность в E_4. Рассмотрим дифференцируемое отображение $g : \Phi \to \Phi'$. Присоединим к поверхности Φ' подвижной репер $\Re' = \left(Y, \vec{a}_i, \vec{a}_{\alpha}\right)$, где $Y = g\left(X\right) = \Phi' \cap \left(X, \vec{e}_3\right)$,

$$\vec{a}_i = p_i^k \vec{e}_k + p_i^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} , \; \vec{a}_{\beta} = \vec{e}_{\beta} . \tag{6}$$

Деривационные формулы репера $\Re'$ имеют вид:

$$d\vec{Y} = \overline{\omega}^j \vec{a}_j , \tag{7}$$

$$d\vec{a}_i = \overline{\omega}_i^j \vec{a}_j + \overline{\omega}_i^{\alpha} \vec{a}_{\alpha} , \tag{8}$$

$$d\vec{a}_{\beta} = \overline{\omega}_{\beta}^j \vec{a}_j + \overline{\omega}_{\beta}^{\alpha} \vec{a}_{\alpha} , \tag{9}$$

где $\vec{a}_{\alpha} = \vec{e}_{\alpha}$. Будем считать, что реперы $\Re$, $\Re'$ согласованы так, что

$$\omega^i = \overline{\omega}^i . \tag{10}$$

Уравнение поверхности Φ' в репере $\Re'$ имеет вид: $\overline{\omega}^{\alpha} = 0$. Дифференцируя его внешним образом и применяя лемму Картана получим:

$$\overline{\omega}_i^{\alpha} = \overline{b}_{ij}^{\alpha} \omega^j , \quad \overline{b}_{ij}^{\alpha} = \overline{b}_{ji}^{\alpha} , \tag{11}$$

где $\overline{b}_{ij}^{\alpha}$ – система двух вторых основных тензоров поверхности Φ'.

Найден связь между дифференциальными формами $\omega_i^j , \omega_i^{\alpha} , \omega_{\alpha}^{\beta}$ и $\overline{\omega}_i^j , \overline{\omega}_i^{\alpha} , \overline{\omega}_{\alpha}^{\beta}$. В работе Г.М. Борбоевой «Геометрия отображений поверхностей евклидова пространства, порождаемых заданной сетью» [3].

$$\overline{\omega}_i^l = \tilde{p}_j^l \left(dp_i^j + p_i^k \omega_k^j + p_i^{\alpha} \omega_{\alpha}^j \right) \tag{12}$$

$$\overline{\omega}_i^l = \left(dp_i^\alpha + p_i^k\omega_k^\alpha + p_i^\beta\omega_\beta^\alpha\right) - p_l^\alpha p_j^l\left(dp_i^j + p_i^k\omega_k^j + p_i^\beta\omega_\beta^j\right) \qquad (13)$$

$$\overline{\omega}_\alpha^j = \tilde{p}_k^j\omega_\alpha^k \qquad (14)$$

$$\overline{\omega}_\alpha^\beta = \omega_\alpha^k - p_j^\beta\tilde{p}_k^j\omega_\alpha^k \qquad (15)$$

$$d\vec{a}_i = \left(dp_i^j + p_i^k\omega_k^j + p_i^\alpha\omega_\alpha^j\right)\vec{e}_j + \left(dp_i^\alpha + p_i^k\omega_k^\alpha + p_i^\beta\omega_\beta^\alpha\right)\vec{e}_\alpha \qquad (16)$$

Вектор $\vec{M}_p = \frac{1}{2}g^{ij}\hat{a}_{ij}^\alpha\vec{e}_\alpha$ называется вектором средней кривизны поверхности Ф. Если $\vec{M} = \vec{0}$, то поверхность называется минимальной.

Напишем вектор средней кривизны $\vec{M}'$ поверхности Φ':

$$\vec{M}' = \frac{1}{2}\overline{g}^{ij}\hat{\overline{a}}_{ij}^\alpha\vec{e}_\alpha,$$

где $\overline{g}^{ij}$ - контравариантные компоненты метрического тензора $\overline{g}^{ij} = \vec{a}_i\vec{a}_j$ поверхности Φ'.

Пусть поверхность Φ' является минимальной, т.е. $\vec{M}' = \vec{0}$, тогда имеем:

$$\overline{g}^{ij}\overline{b}_{ii}^\alpha = 0. \qquad (17)$$

Из равенства (13), учитывая $d_j p_i^\alpha = p_{ij}^\alpha$, получим:

$$\overline{b}_{ii}^\alpha = \left(p_{ij}^\alpha + p_i^k b_{kj}^\alpha + p_i^\beta a_{\beta j}^\alpha\right) - p_l^\alpha\tilde{p}_k^l\left(p_{ij}^k + p_i^l a_{lj}^k + p_i^\beta a_{\beta j}^k\right). \qquad (18)$$

Из (16), учитывая что $p_{ij}^\alpha = d_j p_i^\alpha$ имеем:

$$d_j\vec{a}_i = \left(p_{ij}^k + p_i^l a_{lj}^k + p_i^\beta b_{\beta j}^k\right)\vec{e}_k + \left(p_{ij}^\alpha + p_i^k b_{kj}^\alpha + p_i^\beta a_{\beta j}^\alpha\right)\vec{e}_\alpha.$$

Тогда находим, что:

$$p_{ij}^\alpha + p_i^k b_{kj}^\alpha + p_i^\beta a_{\beta j}^\alpha = \vec{e}_\alpha d_j\vec{a}_i,$$

$$p_l^\alpha\tilde{p}_k^l\left(p_{ij}^k + p_i^l a_{lj}^k + p_i^\beta a_{\beta j}^k\right) = \sum_k p_l^\alpha\tilde{p}_k^l\vec{e}_k d_j\vec{a}_i.$$

Учитывая последние равенства формулы (18) напишем в виде:

$$\overline{b}_{ij}^\alpha = \vec{e}_\alpha d_j\vec{a}_i - \left(\sum_k p_l^\alpha\tilde{p}_k^l\vec{e}_k\right)d_j\vec{a}_i \quad \text{или}$$

$$\overline{b}_{ij}^\alpha = \left(\vec{e}_\alpha - \sum_k p_l^\alpha\tilde{p}_k^l\vec{e}_k\right)d_j\vec{a}_i, \qquad (19)$$

где $\vec{e}_\alpha - \sum_k p_l^\alpha\tilde{p}_k^l\vec{e}_k = \vec{m}_\alpha$.

Тогда геометрический смысл равенств (17) заключается в следующем:

$$\left(\vec{e}_\alpha - \sum_j p_l^\alpha\tilde{p}_j^l\vec{e}_j\right)\overline{g}^{ij}d_j\vec{a}_i = 0. \qquad (20)$$

или $\vec{m}_\alpha \cdot \bar{g}^{ij} d_j \vec{a}_i = 0$. Введем обозначение:

$$\vec{k} = \bar{g}^{ij} d_j \vec{a}_i . \tag{21}$$

Тогда (17) $\Leftrightarrow \vec{m}_\alpha \cdot \vec{k} = 0$ (для всех значений $\alpha = 3,4$).

Верно и обратное, т.е. если имеет место $\vec{m}_\alpha \cdot \vec{k} = 0$, то поверхность $f(\Phi) = \hat{O}'$ является минимальной.

Таким образом доказана

Теорема. Для того, чтобы поверхность $\hat{O}' = f(\Phi)$ была минимальной необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\vec{m}_\alpha \cdot \vec{k} = 0$.

Список использованной литературы:

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. –М.-Л.: Госттехиздат, 1948. 432 с.
2. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве //Литовский математический сборник, 1966.VI. - №4. – С. 475-491.
3. Бобоева Г.М «Геометрия отображений поверхностей евклидова пространства, порождаемых заданной сетью» кандидатское диссертация-2009