УДК 517.928

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ ТЕРЯЮЩИЕ ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРИ ВЫРОЖДЕНИИ
КУБУЛГАН УЧУРДА ЖАЛГЫЗДЫГЫ БУЗУЛГАН ОҢ ЖАК БӨЛҮГҮ АНАЛИТИКАЛЫК БОЛБОГОН СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН ТЕҢДЕМЕЛЕР
SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH NON-ANALYTIC RIGHT-HAND SIDES LOSING THE UNIQUENESS WITH THE DEGENERATION

Мурзабаева А.Б. – ОшТУ
email: aytbu.murzabaeva@mail.ru

Аннотация: *В данной работе рассматриваются сингулярно возмущенные уравнения с неаналитическими правыми частями, вырожденные уравнения которых имеют несколько решений. Без привлечения условий устойчивости доказано существование интервалов притяжения решений вырожденных уравнений.*

Аннотация: *Жумушта оң жак бөлүгү аналитикалык болбогон сингулярдык дүүлүккөн теңдемелер изилденди. Кубулган теңдемелери бир нече чечимдерге ээ болгон учурлар изилденди. Кубулган теңдеменин чечимдеринин тартылуу интервалдарынын жашашы туруктуулук шартты колдонбостон далилденди.*

Annotation: *In this paper, we consider singularly perturbed equations with non-analytic right-hand sides, degenerate equations which have several solutions. Without the involvement of conditions of stability proved the existence of intervals of attraction of solutions of degenerate equations.*

Ачкыч сөздөр: *Сингулярдык дүүлүккөн теңдемелер, тартылуу интервалы, асимптотика, үзгүлтүксүздүк, үзүлүү чекиттери.*

Ключевые слова: *Сингулярно возмущенные уравнения, интервал притяжения, асимптотика, непрерывность, точки разрыва.*

Key words: *Singularly perturbed equations, the interval of attraction, asymptotics, continuity, break point.*

Постановка задачи

В работах [1-2] рассмотрены сингулярно возмущенные уравнения вырожденные уравнения, которых имеют единственные решения и правые части являются непрерывными или аналитическими функциями по всем переменным входящими в эти функции.

В данной работе рассматриваются сингулярно возмущенные уравнения с неаналитическими правыми частями, вырожденные уравнения которых имеют несколько решений.

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + b(t)x^2(t,\varepsilon) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t,\varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

где $t_0 \le t \le T$ $t_0, T \in R$.

При $\varepsilon = 0$ из (1) получим вырожденное уравнение

$$a(t)\xi(t,\varepsilon) + b(t)\xi^2(t,\varepsilon) = 0 \tag{3}$$

(3) имеет решения $\xi_1(t,\varepsilon)\equiv 0$, $\xi_2(t,\varepsilon)=-\dfrac{a(t)}{b(t)}$

Определение. Если $\forall t\in(t_1,T_1)\subset[t_0,T]$ существует $x(t,\varepsilon)$ - решение задачи (1)-(2) и справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=\xi_j(t),$$

то интервал (t_1,T_1) назовем интервалом притяжения решения $\xi_j(t)$.

Задача. Определить интервалы притяжения решений $\xi_j(t)$ (j=1,2), без привлечения условий устойчивости сформулированного в [1].

Решение задачи

I. Поставленную задачу решим при выполнении следующих условий

U1. $a(t),b(t)\in C^2[t_0,T]$ и $\forall t\in[t_0,T]\,(b(t)\neq 0)$.

U2. $a(t)<0$ при $t_0\le t\le T$;

Решение задачи (1)-(2) можно представить в виде

$$x(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon x^0\exp\dfrac{F(t)}{\varepsilon}}{\varepsilon-x^0\displaystyle\int_{t_0}^{t}\exp\dfrac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau} \tag{4}$$

где $F(t)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}a(s)ds$.

Асимптотическое поведение функции (4) зависит от свойств функции $\exp\dfrac{F(t)}{\varepsilon}$.

Следовательно, будем исследовать функцию F(t) для $t\in[t_0,T]$.

$F'(t)=a(t)$ и согласно U2 для $t\in[t_0,T_1]$ функция $F(t)\le 0$, причем равенство имеет место только при $t=t_0$.

Возьмем интеграл

$$J(t)=\int_{t_0}^{t}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau \tag{5}$$

Интеграл (5) проинтегрировав по частям получим

$$J(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{\varepsilon b(\tau)}{a(\tau)}d\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}d\tau=\varepsilon\left[\frac{b(t)}{a(t)}\exp\frac{F(t)}{\varepsilon}-\frac{b(t_0)}{a(t_0)}-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right)'\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right] \tag{6}$$

Согласно U1 функции *a(t)*и *b(t)* имеют непрерывные производные до второго порядка включительно. Тогда интеграл в (6), содержащееся в […], проинтегрировав по частям убеждаемся, что он имеет порядок ε.

Таким образом для (4) имеем следующее асимптотическое представление

$$x(t,\varepsilon)=\frac{x^0\exp\dfrac{F(t)}{\varepsilon}}{1-x^0\left[\dfrac{b(t)}{a(t)}\exp\dfrac{F(t)}{\varepsilon}-\dfrac{b(t_0)}{a(t_0)}+O(\varepsilon)\right]}\ .$$

Отсюда для $t_0<<t\le T$, учитывая $F(t)<<0$, получим $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=0$.

Таким образом, интервал $(t_0, T]$ является интервалом притяжения решения $\xi_1(t) \equiv 0$.

Решение $\xi_2(t)$не имеет интервала притяжения.

II. Пусть выполняются условия

U1. $a(t), b(t) \in C^2[t_0, T]$ и $\forall t \in [t_0, T] \, (b(t) \neq 0)$

U2. $a(t) > 0$ при $t_0 \leq t \leq T$.

Решение задачи представим в виде (4) и исследуем асимптотическое поведение функции $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

В (4) согласно условия U2 для $t \in (t_0, T] \, (F(t) > 0)$.

Проведем следующее преобразование

$$x(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon x^0}{\varepsilon \exp \dfrac{-F(t)}{\varepsilon} - x^0 \displaystyle\int_{t_0}^{t} \exp \frac{F(\tau) - F(t)}{\varepsilon} b(\tau) d\tau} \tag{7}$$

Возьмем интеграл

$$J(t) = \int_{t_0}^{t} \exp \frac{F(\tau) - F(t)}{\varepsilon} b(\tau) d\tau$$

Согласно условия U2 для $t \in [t_0, T] \, (F'(t) = a(t) > 0)$. Отсюда следует, что на отрезке $[t_0, T]$ функция *F(t)* возрастает. Следовательно, $F(\tau) - F(t) \leq 0$ при $t_0 \leq \tau \leq t \leq T$.

Интеграл *J(t)* проинтегрируем по частям

$$J(t) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{a(\tau)} d \exp \frac{F(\tau) - F(t)}{\varepsilon} = \varepsilon \left[\frac{b(t)}{a(t)} - \frac{b(t)}{a(t_0)} \exp \frac{-F(t)}{\varepsilon} - \int_{t_0}^{t} \left(\frac{b(\tau)}{a(\tau)} \right)' \exp \frac{F(\tau) - F(t)}{\varepsilon} d\tau \right].$$

Используя условие U1, интеграл содержащийся в [...] проинтегрировав по частям убеждаемся, что он имеет порядок ε.

На основе проведенных вычислений для (7) имеем следующее асимптотическое представление

$$x(t, \varepsilon) = \frac{x^0}{\exp \dfrac{-F(t)}{\varepsilon} \left(1 + x^0 \dfrac{b(t_0)}{a(t_0)} \right) - x^0 \dfrac{b(t)}{a(t)} + \mathrm{O}(\varepsilon)}$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ для $t_0 << t \leq T$ получим

$$x(t, \varepsilon) \to -\frac{a(t)}{b(t)}.$$

Таким образом, интервал$(t_0, T]$ является интервалом притяжения решения

$$\xi_2(t, \varepsilon) = -\frac{a(t)}{b(t)}$$

Из рассмотренных случаев вытекает: если на некотором интервале *F(t)<0*, то этот интервал является интервалом притяжения$\xi_1(t) \equiv 0$; если*F(t)>0,* то интервал является интервалом притяжения решения$\xi_2(t) = -\dfrac{a(t)}{b(t)}$.

III. Теперь рассмотрим случай содержащий случаи I и II.

Задачу решим при выполнении условий

U1. $a(t), b(t) \in C^2[t_0, T]$ и $\forall t \in [t_0, T]\left(b(t) \neq 0, a'(t) > 0\right)$.

U2. $a(t) < 0$ при $t_0 \le t \prec T_0$; $a(T_0) = 0$;

$a(t) > 0$ при $T_0 < t \le T$.

Определим функцию $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(s) ds$

U3. $\exists !\ T_1 (T_0 < T_1 < T)$ и $F(T_1) = 0$.

Решение задачи (1)-(2) можно представить в виде (4).Как и в предыдущем случае исследуем функцию *F(t)* для $t \in [t_0, T]$. По определению $F'(t) = a(t)$. Тогда согласно условия U2 функция убывает на интервале $[t_0, T_0)$ и возрастает на интервале $[T_0, T]$. В точке $t = T_0$ имеет минимум. Если учесть условие U3, то для $t \in (t_0, T_1)$ $(F(t) < 0)$, а для $t \in (T_1, T]$ $(F(t) > 0)$.

Возьмем интеграл

$$J(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon} b(\tau) d\tau \tag{7}$$

Пусть $t_0 \le t << T_0$. Интеграл (7) проинтегрировав по частям убеждаемся, что он имеет порядок ε

$$J(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon \frac{b(\tau)}{a(\tau)} d \exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon} d\tau = \varepsilon \left[\frac{b(t)}{a(t)} \exp\frac{F(t)}{\varepsilon} - \frac{b(t_0)}{a(t_0)} - \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{b(\tau)}{a(\tau)} \right)' \exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon} d\tau \right].$$

Пусть $T_0 - \delta \le t \le T_0 + \delta$ ($0 < \delta -$достаточно малое число, не зависящая от ε). Тогда интеграл (7) можно представить в виде

$$J(t) = \int\limits_{t_0}^{T_0 - \delta} \exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon} b(\tau) d\tau + \int\limits_{T_0 - \delta}^{t} \exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon} b(\tau) d\tau$$

В (7) первый интеграл проинтегрировав по частям убеждаемся, что он имеет порядок ε.
На основе условий U1, U2 функцию *F(t)* можно представить в виде

$$F(t) = F(T_0) + \frac{F''(T_0 + \Theta(t - T_0))}{2!} (t - T_0)^2, \text{где } 0 < \Theta < 1;\ T_0 - \delta \le t \le T_0 + \delta$$

Подберем, учитывая что $F''(T_0 + \Theta(t - T_0)) > 0$, δ так, чтобы выполнялось неравенство

$$F(T_0) \le F(t) \le F(T_0) + \alpha(\delta) < 0,\ \alpha(\delta) > 0.$$

Согласно U1 $\forall t \in [t_0, T]\left(m_0 \le b(t) \le M_0\right)$,

Тогда справедливо неравенство

$$m_0 \exp\frac{F(t_0)}{\varepsilon} 2\delta \le \int\limits_{T_0 - \delta}^{T_0 + \delta} b(\tau) \exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon} d\tau \le M_0 \exp\frac{F(T_0) + \alpha(\delta)}{\varepsilon} \cdot 2\delta$$

Отсюда следует, для $T_0 - \delta \le t \le T_0 + \delta$

второй интеграл имеет порядок $\varepsilon^n, n \in N$.

Пусть $T_0 + \delta \le t \le T_1$. Тогда интеграл (7) можно представить в виде

$$J(t)=\int_{t_0}^{T_0-\delta}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\int_{T_0-\delta}^{T_0+\delta}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\int_{T_0+\delta}^{t}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau \qquad (8)$$

В (8) первый интеграл имеет порядок ε, второй ε^n, а третий порядок ε(для этого достаточно проинтегрировать третий интеграл по частям).
Подведя итог можно сказать, что для $t_0 \le t \le T_1$ интеграл (7) имеет порядок ε.
Из проведенных вычислений вытекает, для $t_0 \le t << T_1$ справедливо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=0 \qquad (9)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $T_1 \le t \le T$. Из условий U2 и U3 вытекает, $\forall t\in(T_1,T](F(t)>0)$.
В (4) проведем следующие преобразование

$$x(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon x^0}{\varepsilon\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}-x_0\int_{t_0}^{t}\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau} \qquad (10)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_1(t)=\int_{t_0}^{t}\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}d\tau \qquad (11)$$

Интеграл (11) представим в виде

$$\begin{aligned}J_1(t)=&\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}\int_{t_0}^{T_0-\delta}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}\int_{T_0-\delta}^{T_0+\delta}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\\&+\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}\int_{T_0-\delta}^{T_1}\exp\frac{F(\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau+\int_{T_1}^{t}\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau\end{aligned} \qquad (12)$$

В (12), в первом, втором интегралах $F(\tau)\le 0$.
Следовательно, можно воспользоваться вычислениями, проведенными в предыдущем случае. Тогда для (12) имеем следующее аналитическое представление

$$J_1(t)=\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}\cdot \mathrm{O}(\varepsilon)+\int_{T_1}^{t}\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau .$$

Возьмем интеграл

$$J_2(t)=\int_{T_1}^{t}\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau$$

и проведем интегрирование по частям. Тогда

$$J_2(t)=\int_{T_1}^{t}\varepsilon\frac{b(\tau)}{-a(\tau)}d\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}=\varepsilon\left[\frac{b(t)}{a(t)}-\frac{b(T_1)}{a(T_1)}\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}-\int_{T_1}^{t}\left(\frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right)'\exp\frac{F(\tau)-F(t)}{\varepsilon}d\tau\right].$$

В полученном, для $J_2(t)$ выражение, интеграл содержащееся в […] имеет порядок ε, согласно условиям U2 и U3.
Таким образом

$$J_2(t)=\varepsilon\left(\frac{b(t)}{a(t)}-\frac{b(T_1)}{a(T_1)}\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}+\mathrm{O}(\varepsilon)\right).$$

С учетом проведенных вычислений для (10) получим следующее асимптотическое представление

$$x(t,\varepsilon)=\frac{x^0}{\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}-x^0\mathrm{O}(1)\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}-x^0\frac{b(t)}{a(t)}+x^0\frac{b(T_1)}{a(T_1)}\exp\frac{-F(t)}{\varepsilon}+\mathrm{O}(\varepsilon)}$$

Отсюда для $T_1 << t \le T$ при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$x(t,\varepsilon)\to-\frac{a(t)}{b(t)} \tag{13}$$

Предельные соотношения (9) и (13) определяют: интервал (t_0,T_1) является интервалом притяжения решения $\xi_1(t)\equiv 0$, а интервал $(T_1,T]$- интервалом притяжения решения $\xi_2(t)=-\dfrac{a(t)}{b(t)}$.

Подведя итог можем сказать: в одних случаях существуют интервалы притяжения только для одного решения вырожденного уравнения, а в других случаях существуют интервалы притяжения для каждого решения.

Приведем примеры для рассматриваемых случаев

Пример 1.Пусть $a(t)\equiv -1$, а $b(t)$ произвольная функция удовлетворяющая условию U1; $-1\le t\le 1$. Выполняются условия U1- U2.

Для этого случая решение задачи (1)-(2) можно представить в виде

$$x(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon x^0\exp\frac{-(1+t)}{\varepsilon}}{\varepsilon-x^0\int\limits_{-1}^{t}\exp\frac{-(1+\tau)}{\varepsilon}b(\tau)d\tau}$$

Отсюда для $-1\le t\le 1$ при $\varepsilon\to 0$ получим

$x(t,\varepsilon)\to 0$ т. е (-1,1)- интервал притяжения решения $\xi_1(t)\equiv 0$.

Пример 2. $a(t)=2t$, а $b(t)\in C^2[-1,2]$ и $\forall t\in[-1,2]\ (b(t)\neq 0)$.

Нетрудно проверить выполнимость условий U1- U3.

Действительно $a'(t)=2>0$.

$a(t)<0$ при $-1\le t<0$; $a(0)=0$; $a(t)>0$ при $0<t\le 2$.

$F(t)=2\int\limits_{-1}^{t}\tau d\tau=t^2-1$ и $F(1)=0$, $0<1<2$.

Повторяя вычисления проведенные для II получим: (-1,1)- интервал является интервалом притяжения решения $\xi_1(t)\equiv 0$, а (-1,2] – интервалом притяжения решения $\xi_2(t)=-\dfrac{a(t)}{b(t)}$.

Список использованной литературы:

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных [Текст]/А.Н. Тихонов//мат.сб.1952.-т.31(73),№3.-575-586.

2. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости //Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. – С. 190-200.