УДК 517.956.6

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ЛИНИЕЙ СКЛЕИВАНИЯ
ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЖАБЫШТЫРУУ ШАРТТАРЫ ХАРАКТЕРИСТИКАДА БЕРИЛГЕН ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕ ЖӨНҮНДӨ
BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH PSEUDO RESPONSE LINE GLUING

Сопуев А., Аркабаев Н.К.
Ошский государственный университет
Кыргызстан, г.Ош,
a_sopuev@mail.ru, nurkasym@gmail.com

Аннотации: Методом интегральных уравнений и функции Римана доказано существование и единственность решения краевой задачи для псевдопараболических уравнений, когда условия склеивания задается на двукратной действительной характеристике.

Интегралдык теңдемелер жана Римандын функциясы методдору менен псевдопараболалык теңдемелер үчүн жабыштыруу шарттары эки эселүү чыныгы характеристикада берилген чек аралык маселенин чечиминин жалгыздыгы жана жашашы далилденген.

The method of integral equations and the Riemann function proved the existence and uniqueness of solutions of the boundary value problem for pseudo-parabolic equations when gluing the conditions set on the actual characteristics of the double.

Ключевые слова: псевдопараболические уравнения, краевые условия, функции Римана, интегральные уравнения.

Түйүндүү сөздөр: псевдопараболикалык теңдеме, чак аралык шарттар, Риман функциясы, интегралдык теңдеме.

Keywords: pseudoparabolic equations, boundary conditions, the Riemann function, integral equations.

1. Постановка задачи. В области $D=\{(x,y):0<x<\ell,\ -h_1<y<h\}$ $(\ell,h,\ h_1>0$ рассмотрим уравнения

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}=0,\quad (x,y)\in D_1=D\cap(y>0) \tag{1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+a_2u_{xx}+b_2u_{xy}+c_2u_x+d_2u_y+e_2u=0,\ \ (x,y)\in D_2=D\cap(y<0) \tag{2}$$

где a_2, b_2, d_2, c_2, e_2 - заданные функции.

Линия $y=0$ является трехкратной действительной характеристикой уравнения (1), поэтому это уравнение часто называется уравнением с кратными характеристиками [1]. Однако, из-за наличия члена u_{xy}, постановка задачи и свойства решения уравнения (1) аналогично параболическим уравнениям.

Уравнение (2) по терминологии работы [2] называется псевдопараболическим уравнением. Это уравнение имеет двукратную действительную характеристику $y=0$ и однократную характеристику $x=0$.

В работе рассматривается краевая задача для уравнений (1) и (2), где условия склеивания задаются на двукратной характеристике $y=0$.

Рассматриваемые уравнения используются при изучении поглощения почвенной влаги растениями [3].

Пусть C^{n+m} означает класс функций, имеющих производные $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s (r=0,1,...,n; s=0,1,...,m)$.

Относительно коэффициентов уравнения предполагаем следующее:

$$a_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{2+0}(D_2), b_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2),$$
$$c_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{1+0}(D_2),\ d_2\in C(\overline{D}_2)\cap C^{0+1}(D_2)\ e_2\in C(\overline{D}_2). \tag{3}$$

Задача 1. Найти функцию

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^{1+1}(D)\cap[C^{3+0}(D_1)\cap C^{2+1}(D_2)],$$

удовлетворяющую уравнения (1) и (2) в областях D_1 и D_2 соответственно, краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ u(\ell,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h, \tag{4}$$

$$u(0,y)=\chi_1(y),\ u_x(0,y)=\chi_2(y),\ -h_1\le y\le 0 \tag{5}$$

и условиям сопряжения

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\ 0\le x\le\ell, \tag{6}$$

где $\varphi_i(y)\ (i=1,3),\ \chi_j(y)\ (j=1,2)$ - заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям гладкости

$$\varphi_1(y),\varphi_3(y)\in C^2[0,h],\ \varphi_2(y)\in C^1[0,h],$$
$$\chi_i(y)\in C^1[-h_1,0]\ (i=1,2) \tag{7}$$

и условиям согласования

$$\varphi_1(0)=\chi_1(0),\ \varphi_1'(0)=\chi_1'(0),\ \varphi_2(0)=\chi_2(0). \tag{8}$$

Введем обозначения

$$u(x,-0)=u(x,+0)=\tau(x),\ u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=\nu(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{9}$$

где $\tau(x),\nu(x)$ - пока неизвестные функции.

2. Представления решения задачи 1 в области D_2. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: найти функцию $u\ (x,y)\in C^1(\overline{D}_2)\cap C^{1+1}(D_2)\cap C^{2+1}(D_2)$ удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям (5) и начальному условию

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le\ell. \tag{10}$$

Для решения этой задачи будем применить метод функции Римана.

Рассмотрим тождество

$$\vartheta L_2(u)-uL_2^*(\vartheta)=[\vartheta u_{\xi\eta}\vartheta_{\xi\eta}u+a_2\vartheta u_\xi-(a_2\vartheta)_\xi u+$$
$$b_2\vartheta u_\eta+C_2\vartheta u]_\xi-[\vartheta_\xi u_\xi+(b_2\vartheta)_\xi u-d_2\vartheta u]_\eta, \tag{11}$$

где $L^*(\vartheta)\equiv-\vartheta_{\xi\xi\eta}+(a_2\vartheta)_{\xi\xi}+(b_2\vartheta)_{\xi\eta}-(c_2\vartheta)_\xi-(d_2\vartheta)_\eta+e_2\vartheta.$

Пусть $\vartheta(x,y,\xi,\eta)$ - является решением следующей задачи:

$$L^*_{2(\xi,\eta)}(\vartheta(x,y;\xi,\eta))=0,(\xi,\eta)\in D_2^*=\{(x,y):0<\xi<x,\ y<\eta<0\}, \tag{12}$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=0,\ \ \vartheta_\xi(x,y;\xi,\eta)|_{\xi=x}=\exp\left(\int_y^\eta a_2(x,t)dt\right),\ y\le\eta\le 0; \tag{13}$$

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=y}=\theta_1(x,y;\xi),\ 0\le\xi\le x, \tag{14}$$

причем $\theta_1(x,y;\xi)$ определяется как решение задачи Коши:

$$\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-[b_2(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)]_\xi+d_2(\xi,y)\vartheta(x,y;\xi,y)=0,\ 0<\xi<x,$$
$$\vartheta(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1. \tag{15}$$

При выполнении условия (3) задача (15) однозначно разрешима.

Решение задачи (12) - (14) можно построить методом интегральных уравнений. Решение этой задачи назовем функцией Римана.

Интегрируя тождество (11) по области D_2^*, получим

$$\iint\left[\vartheta L_2(u)-uL_2^*(\vartheta)\right]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D_2^*}\left[\vartheta_\xi u_\xi+(b_2\vartheta)_\xi u-d_2\vartheta u\right]d_\xi+$$
$$+\left[\vartheta u_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi\eta}u+a_2\vartheta u_\xi-(a_2\vartheta)_\xi u+b_2\vartheta u_\eta+c_2\vartheta u]d_\eta\right]. \tag{16}$$

Используя свойства функции Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$, из (16) получим представление решения задачи 1 в области D_2:

$$u(x,y)=\vartheta_\xi(x,y;x,0)\tau_1(x)+\int\limits_0^x A_1(x,y;\xi)\tau_1(\xi)d\xi$$
$$+\int\limits_0^y\left[b_1(x,y;\eta)\chi_1'(\eta)-\vartheta(x,y;0,\eta)\chi_2'(\eta)+C_1(x,y;\eta)\chi_2(\eta)+E_1(x,y;\eta)\chi_1(\eta)\right]d\eta \tag{17}$$

где $A_1(x,y;\xi)=-\vartheta_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)+\left[b_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0)\right]_\xi-d_2(\xi,0)\vartheta(x,y;\xi,0),$

$B_1(x,y;\eta)=\vartheta_\xi(x,y;0,\eta)-b_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta),\ C_1(x,y;\eta)=-a_2(0,y)\vartheta(x,y;0,\eta),$

$E_1(x,y;\eta)=[a_{2\xi}(0,\eta)-C_2(0,\eta)\vartheta(x,y;0,\eta)+a_2(0,\eta)\vartheta_\xi(x,y;0,\eta).$

Вычислив производную по y от $u(x,y)$ с использованием формулы (17), затем устремляя y к нулю, имеем соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x)=\vartheta_{\xi y}(x,0;x,0)\tau(x)+\int\limits_0^x A_{1y}(x,0;\xi)\tau(\xi)d\xi+g_1(x), \tag{18}$$

где $g_1(x)=B_1(x,0,0)\chi_1'(0)-\vartheta(x,0;0,0)\chi_2'(0)+C_1(x,0,0)\chi_2(0)+E_1(x,0,0)\chi_1(0).$

3. Функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Уравнение (1) запишем в виде

$$u_{xx}-u_y=\omega(y)-\varphi_1'(y). \tag{19}$$

где $\omega(y)$ - неизвестная функция.

Из (19) при $y\to 0$ имеем

$$\tau''(x)-\nu(x)=\omega(0)-\varphi_1'(0). \tag{20}$$

Исключая $\nu(x)$ из (18) и (20) получим

$$\tau''(x)=\omega(0)+a_1(x)\tau(x)+\int\limits_0^x\tilde{A}_1(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+\tilde{g}_1(x), \tag{21}$$

где $\tilde{g}_1(x)=g_1(x)-\varphi_1'(0),\ a_1(x)=\vartheta_{\xi y}(x,0;x,0),\ \tilde{A}_1(x,\xi)=A_{1y}(x,0;\xi)$, а $\omega(0)$ - неизвестная константа.

Решение задачи Коши для уравнения (21) при условии

$$\tau(0)=\chi_1(0),\ \tau'(0)=\chi_2(0)$$

представим в виде

$$\tau(x)=\frac{1}{2}\omega(0)x^2+\int\limits_0^x A_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+g_2(x), \tag{22}$$

где $A_2(x,\xi)=a_1(\xi)(x-\xi)+\int\limits_{\xi}^{x}(x-t)\widetilde{A}_1(t,\xi)dt,\;\; g_2(x)=\chi_1(0)+\chi_2(0)x+\int\limits_{0}^{x}(x-t)\widetilde{g}_1(t)dt.$

Если учесть условие согласование $\tau(\ell)=\varphi_2(0)$, то из (22) можно определить $\omega(0)$:

$$\omega(0)=\frac{2}{\ell^2}\left[\varphi_2(0)-g_2(\ell)\right]-\frac{2}{\ell^2}\int\limits_0^{\ell}A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi\,.$$

Тогда из (22) получим следующее интегральное уравнение для $\tau(x)$:

$$\tau(x)=g_3(x)+\int\limits_0^{x}A_2(x,\xi)\tau(\xi)d\xi-\frac{x^2}{\ell^2}\int\limits_0^{\ell}A_2(\ell,\xi)\tau_1(\xi)d\xi \tag{23}$$

где $g_3(x)=g_2(x)+\frac{1}{\ell^2}[\varphi_2(o)-g_2(e)]x^2$.

После обращения вольтеровской части уравнения (23) приходим к уравнению Фредгольма второго рода

$$\tau(x)=g(x)+\int\limits_0^{\ell}H(x,\xi)\tau(\xi)d\xi, \tag{24}$$

где $H(x,\xi)=-\frac{1}{\ell^2}\left[x^2+\int_0^x R(x_1t)t^2\right]A_2(\ell,\xi)$, $g(x)=g_3(x)+\int\limits_0^{x}R(x,\xi)g_3(\xi)d\xi$, $R(x,t)$ - резольвента ядра $A_2(x,t)$

Согласно общей теории [4], если

$$\ell L<1, \tag{25}$$

где $L=\max\limits_{0\le x,\xi\le\ell}\left|H(x,\xi)\right|$, то уравнение (24) имеет единственное решение.

4. Решение задачи 1 в области D_1. С помощью функции Грина $G(x,y;\xi,\eta)$:

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]-\right.$$
$$\left.-\exp\left[-\frac{(x-\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}$$

Представим решение уравнения (19), удовлетворяющее краевым условием

$$u(0,y)=\varphi_2(y),\; u(\ell,y)=\varphi_3(y),\; u(x,0)=\tau(x)$$

в виде

$$\begin{aligned}u(x,y)=&-\int\limits_0^{y}G(x,y;0,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta-\int\limits_0^{y}G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta+\int\limits_0^{\ell}G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\\&-\int\limits_0^{y}\omega(\eta)d\eta\int\limits_0^{\ell}G(x,y;\xi,\eta)d\xi+\int\limits_0^{y}\varphi_1'(\eta)d\eta\int\limits_0^{\ell}G(x,y;\xi,\eta)d\xi.\end{aligned} \tag{26}$$

Из (26) с помощью условия $u(0,y)=\varphi_1(y),$ получаем интегральное уравнение

$$\int\limits_0^{y}K(y,\eta)\omega(\eta)d\eta=r(y), \tag{27}$$

где

$$K(y,\eta)=\int_0^{\ell} G(0,y;\xi,\eta)d\xi,$$

$$r(y)=\int_0^{y} G_{\xi}(0,y;0,\eta)\varphi_2(y)d\eta+\int_0^{y} G_{\xi}(0,y;\ell,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^{y} G(0,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\int_0^{y}\varphi_1'(\eta)d\eta\int_0^{\ell} G(0,y;\xi,\eta)d\xi\varphi_1(y).$$

Так как

$$K(y,\eta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\ell}{2\sqrt{y-\eta}}}\ell^{-s^2}ds+\int_0^{\ell} q(y,\xi,\eta)d\xi,$$

где

$$q(y;\xi,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left\{\exp\left[-\frac{(3-4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\xi\right\}-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-2n\ell-4)^2}{4(y-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi-2\ell+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right]\xi\right\},$$

Здесь ′ означает отсутствие члена суммы при $n=1$.

Если учесть, что $\lim\limits_{\eta\to y}K(y,\eta)=1,$ то из (27) путем дифференцирования получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\omega(y)+\int_0^{y} K_y(y,\eta)\omega(\eta)d\eta=r'(y),$$

допускающее однозначное решение. Подставляя найденную функцию $\omega(y)$ в (26) получим решение задачи 1 вобласти D_1.

Таким образом доказана

Теорема. Если выполняются условия (3), (7), (8) и (25), то решение задачи 1 существует и единственно.

Список использованной литературы:

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
2. Colton D. Pseudoparabolic equations in One Space variable // J. Differential Equations. - 1972. 12, - P.-565.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк. 1995. – 301 с.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. - М.: Наука, 1975. – 302 с.