

УДК 517

ОБЗОР ЭФФЕКТОВ И ЯВЛЕНИЙ В РАЗЛИЧНЫХ РАЗДЕЛАХ МАТЕМАТИКИ
МАТЕМАТИКАНЫН АР ТҮРДҮҮ БӨЛҮМДӨРҮНДӨ ЭФФЕКТЕРДИ ЖАНА
КУБУЛУШТАРДЫ КАРОО
SURVEY OF EFFECTS AND PHENOMENA IN VARIOUS BRANCHES
OF MATHEMATICS

Кененбаева Г.М.
Национальная академия наук, Бишкек, Кыргызстан
gylaim@mail.ru

Аннотация: Ранее автор предложила общие определения понятий «эффекта» и «явления», выявила эффект «аналитичности» и обнаружила некоторые новые явления в теории сингулярных возмущений. В данной статье произведен обзор известных эффектов и их следствий в различных разделах математики, выявлен эффект «множественности».

Мурда автор «эффект» жана кубулуш түшүнүктөрүнө жалпы аныктамаларды сунуш кылган, «аналитикалык» кубулушун көрсөткөн жана сингулярдуу козголуу теориясында кээ бир жаңы кубулуштарды ачып көрсөткөн. Берилген макалада математиканын ар түрдүү бөлүмдөрүндө белгилүү эффекттер жана алардын корутундуларын кароо иштелип чыккан. «Көпчө» эффектиси көрсөтүлгөн.

Earlier, the author proposed general notions of “effect” and “phenomenon”, revealed the effect of analyticity and found new phenomena in the theory of singular perturbations. Survey of known effects and their consequences in various branches of mathematics is performed, the effect of “numerousity” is found in this paper.

Ключевые слова: эффект, явление, бесконечность, многомерность, множественность, аналитичность, синергетика, сингулярность, корректность, дифференциальное уравнение, интегральное уравнение, разностное уравнение

Түйүндүү сөздөр: эффект, кубулуш, чексиздик, көпөлчөмдүү, «көпчө», аналитикалык, синергетика, сингулярдуулук, корректүүлүк, дифференциалдык теңдемелер, интегралдык теңдеме, айырмалуу теңдеме

Keywords: effect, phenomenon, infinity, multidimensionality, numerousity, analyticity, synergetic, singularity, correctness, differential equation, integral equation, difference equation

Введение

Понятия «эффекта» и «явления» являются важными в естественных науках, их открытие всегда приводило к дальнейшему развитию науки. Вместе с тем, нам не удалось найти какие-либо определения этих понятий в литературе. В связи с этим, в [1] мы попытались сформулировать соответствующие рамочные понятия для математики, с целью их более систематического поиска.

Рассматривается математическая теорема в наиболее общем, следующем виде: если объект $x \in X$ имеет свойство A , то он имеет и (искомое, требуемое) свойство B .

Для того, чтобы доказать, что свойство A является существенным для наличия свойства B , нужно построить пример объекта, у которого нет свойства A и нет свойства B .

Но если у объекта нет свойства B , то у него должны быть какие-то другие свойства. Это мы и предложили взять за наиболее общее определение понятия «явление».

«Эффектом свойства A » можно назвать свойство E объектов $x \in X$, имеющих свойство A , но такое, что логическое доказательство $A \Rightarrow E$ очень сложно и свойство

Ебыло обнаружено не путем логического вывода, а незапланированно, путем выявления необычных математических объектов, эксперимента (как в физике или химии) или путем вычислительного эксперимента.

Нами составлен список «эффектов в математике», которые можно считать известными, обнаружены некоторые новые явления в рамках «эффекта сингулярности».

На основе анализа работ [2]-[4] с помощью этой методики нами сделан вывод о наличии в математике «эффекта аналитичности» [5] - задачи из различных разделов математики, которые являются некорректными в классах непрерывных и гладких функций, становятся корректными в некоторых классах аналитических функций. В работах упомянутых авторов это были задачи из различных разделов теории дифференциальных уравнений. Л. Аскар кызыпод нашим руководством рассмотрела с данной точки зрения задачи теории интегральных уравнений и обнаружила классы интегральных уравнений первого рода, которые являются корректными в некоторых классах аналитических функций [6]. Нами также выявлен эффект «многочисленности» [8] и обнаружено самое раннее упоминание следствия из этого эффекта и эффекта упорядочивания в литературе [7].

1. Эффект бесконечности

Этот эффект является, вероятно, первым, который отделил математику от «естественных» представлений об окружающем мире.

Вследствие него, в школе Пифагорейцев было обнаружено явление несоизмеримости.

В связи с парадоксом Зенона математикам пришлось сделать вывод, что сумма бесконечного количества слагаемых может быть конечной.

Г.Галилей обратил внимание, что преобразование $n \rightarrow n^2$ взаимно однозначно отображает бесконечное множество натуральных чисел на его часть, то есть возникает явление «часть эквивалентна целому». Это противоречит как интуиции, так и 8-й аксиоме Евклида «целое больше части».

Г.Кантор, после доказательства того, что мощность множества натуральных чисел меньше мощности точек отрезка, обнаружил аналогичное явление: мощность множества точек квадрата равна мощности точек отрезка.

Количество таких примеров можно увеличить.

И в настоящее время этот эффект приводит к построению контрпримеров, опровергающих «естественные» гипотезы о непрерывных объектах в различных разделах математики.

2. Эффект упорядочения, или синергетический

С древних времен известна идея «самопроизвольного возникновения порядка из хаоса» (например, согласно древнегреческой мифологии, «возникновение космоса из хаоса»).

Насколько известно, первое упоминание о конкретном синергетическом процессе и диссипативной системе – это термин кыргызского языка - явление «иргөө». Это слово обозначает «дискретная оптимизация при помощи синергетики», а также следующее физическое явление. Если поместить в вибрирующий выпуклый сосуд большое количество (очень твердых) шаров различных размеров, сделанных из одного материала, то через некоторое время самый большой шар окажется наверху посередине. На основании численных экспериментов [7] нами выдвинута гипотеза, что аналогичное явление имеет место для некоторого класса систем стохастических разностных уравнений в математике.

Таким образом, если количества поступающей в систему и уходящей из системы энергии одинаковы и энтропия поступающей энергии меньше энтропии уходящей энергии, то энтропия системы уменьшается, то есть в ней возникает упорядоченность. Иными словами, диссипативная система - это открытая система - устойчивое состояние, возникающее в неравновесной среде при условии диссипации (рассеивания) энергии, которая поступает извне. Диссипативная система иногда называется ещё стационарной открытой системой или неравновесной открытой системой. Если же отток энтропии превысит ее внутренний рост, то возникают и разрастаются до макроскопического уровня крупномасштабные флуктуации, а при определенных условиях в системе начинают происходить самоорганизационные процессы, создание упорядоченных структур.

Следующий пример (физический) – ячейки Бенара – это возникновение упорядоченности в виде конвективных ячеек в форме правильных шестигранных структур в слое вязкой жидкости с вертикальным градиентом температуры, то есть равномерно подогреваемой снизу. В тонком слое при подогреве снизу образуются ячейки правильной гексагональной формы, внутри которых жидкость поднимается по центру и опускается по краям ячейки (соответствующие вычислительные эксперименты и математические гипотезы нам неизвестны).

Третий пример - явление квазипериодического обмена энергией между первыми частотами (С.Улам). Был проведен численный эксперимент по моделированию движения струны заменой ее конечным количеством частиц, упруго связанных между собой, с наличием малой нелинейности. Экспериментаторы рассчитывали моделировать явление перемешивания (переход энергии от первой частоты к более высоким), вместо этого они обнаружили явление квазипериодического обмена энергией между несколькими первыми частотами.

3. Эффект сингулярности малых возмущений

Сначала явление пограничного слоя было обнаружено экспериментальным путем в физике (Г.Прандтль), а в дальнейшем - в математике – для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной (А.Н. Тихонов). Также были обнаружены явление внутреннего пограничного слоя (А.Б. Васильева), явление срыва для систем дифференциальных уравнений с малым параметром (Л.С.Понтрягин).

Для систематического поиска новых явлений в теории сингулярно-возмущенных систем было предложено рассматривать множество решений соответствующей вырожденной системы, как точечное (М.И.Иманалиев, П.С.Панков). Таким путем были обнаружены явления вращающегося пограничного слоя, всплеска, удаляющегося пограничного слоя, поворота решений вырожденной системы, расщепления областей притяжения.

Нами были выявлены необходимые условия для возникновения новых явлений, как следствий этого эффекта, явление углубляющегося пограничного слоя, явление практического расщепления траекторий в теории сингулярно-возмущенных систем при разностной аппроксимации [9].

Для уравнения

$$\varepsilon y_\varepsilon'(t) = f(t, y_\varepsilon(t)), \quad t \in [0, b], \quad f \in C([0, b] \times R), \quad b \leq \infty \quad (1)$$

с начальным условием

$$y_\varepsilon(0) = \eta \in R, \quad (2)$$

предположим, что вырожденное уравнение

$$f(t, y_0(t)) = 0, \quad t \in [0, b], \quad (3)$$

имеет непрерывное решение

$$y=v(x) \quad (0 \leq x \leq b);$$

2) $\operatorname{sgn} f(x,y) = -\operatorname{sgn} (y-v(x)) \quad (0 \leq x \leq b, y \in \mathbb{R})$.

Наряду с (1) рассмотрим уравнение без параметра

$$w'(x) = f(x, w(x)) \quad (0 \leq x \leq b), \quad (4)$$

$$w(0) = y_0, \quad (5)$$

Лемма 1. Начальная задача (4)–(5) при выполнении условий 1)–2) имеет решение в $C^1[0, b]$.

Теорема 1. Если выполняются условия 1) и 2) для функций $f(x, y)$ и $v(x)$ – линейно-возрастающая (линейно-убывающая) функция, то для любого малого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ для решения начальной задачи для уравнения (1) выполняется неравенство

$$y(x, \varepsilon) < v(x) \quad (y(x, \varepsilon) > v(x)) \quad (\delta \leq x \leq b). \quad (6)$$

Сохранение знака разности между решениями возмущенного и вырожденного уравнений (условие 2)) гарантирует от возникновения различных явлений.

В работах Л. С. Понтрягина, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розова изучены сингулярно возмущенные системы второго порядка, описывающие релаксационные колебания, приводятся некоторые рекомендации по построению асимптотических разложений решений с учетом наличия точек срыва, по следующей методике: всякую траекторию системы следует разбить на несколько участков и на каждом из этих участков строить свое асимптотическое представление с произвольной заданной степенью точности. Эти участки в свою очередь сшиваются в цельную траекторию.

Для таких систем нами обнаружено явление удлиняющегося сингулярного цикла.

4. Эффект аналитичности

Так мы предложили назвать следующий эффект: задачи из различных разделов математики на поиск функций, которые являются некорректными в классах непрерывных и гладких функций, становятся корректными в некоторых классах аналитических функций. Впервые он был выявлен не логическим путем, а при приближенном решении начальных задач методом сеток для дифференциальных уравнений в частных производных.

Такие явления обнаружены в различных разделах теории дифференциальных уравнений, их аппроксимации, интегральных уравнений первого рода. Было найдено следующее необходимое условие корректности задач для линейных интегральных уравнений первого рода.

Известно, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром на ограниченном отрезке является вполне непрерывным. Следовательно, задача решения линейного интегрального уравнения первого рода типа Фредгольма с заданной правой частью – непрерывной функцией – не может быть корректно поставлена. Таким образом, корректной может быть только задача решения линейного интегрального уравнения первого рода на неограниченной области.

5. Эффект множественности

Так мы предлагаем назвать эффект, вызывающий явления, которые имеют место только для больших количеств каких-либо объектов (в математике – уравнений).

5.1. Явление «иргөө», которое возникает для достаточно большого количества шаров (по нашим расчетам – более 50), также может быть отнесено к «эффекту множественности».

5.2. Возникает следующий вопрос в отношении следующего известного явления множественности: явление гауссовского распределения вероятностей при большом числе попыток (например, если сыпать крупный песок на наклонную доску) было обнаружено практически до формулировки его Гауссом, или уже было предложено для реальной иллюстрациигауссовского распределения?

5.3. Для решений системы большого количества дифференциальных уравнений второго порядка, описывающей упругое соударение частиц и их упругое отталкивание от стенок сосуда, известно следующее.

Для «почти всех» начальных условий через некоторое время устанавливается почти равномерное распределение частиц в сосуде (например, почти одинаковое количество частиц в двух половинах сосуда). При приближенном решении таких систем это явление будет иметь место уже для всех начальных условий.

Примечание. Иногда используется термин «явление множественности» для неединственности решения какой-нибудь математической задачи (см. например [10]).

6. Эффект оптимальности «среднего значения» параметра

Так нами названо следующее. Пусть имеется некоторая нерешаемая или очень сложно решаемая математическая задача A с решением x . Вводится малый положительный параметр ε такой, что $A_\varepsilon \rightarrow A$ в некотором смысле и математическая задача A_ε решается легче (с решением x_ε). Тогда минимальное отклонение x_ε от x достигается не для «очень малых» значений параметра ε (поскольку сложность решения задачи A переходит на сложность решения задачи A_ε), и не для «больших» значений параметра ε (поскольку тогда задача A_ε «далека» от задачи A).

Приведем примеры.

6.1. При регуляризации решений некорректных задач по Тихонову с параметром ε для теоретической оценки погрешности $\|x_\varepsilon - x\|$ получаются выражения вида

1. Кененбаева Г.М. Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений. - Бишкек: Изд-во "Илим", 2012. - 204 с.
2. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. - Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. - С. 190-200.
3. Pankov P.S., Imanaliev T. M. Convergence of Finite Difference Method for First-Order Partial Differential Equations with Analytical Initial Conditions // Analytical and Approximate Methods: International Conference at the Kyrgyz-Russian Slavic University. - Shaker Verlag, Aachen, Germany, 2003. - Pp. 185-193.
4. Панков П.С., Сабирова Х.С. Корректность обратной начальной задачи для уравнения теплопроводности с аналитическими данными // Дифференциальные уравнения в частных производных и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конференции (г. Ташкент, 16-19 ноября 2004). Том 1. – Ташкент, 2004. – С. 117-121.
5. Кененбаева Г. Эффект аналитичности для дифференциальных и интегральных уравнений. – Saarbrücken, Deutschland: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. – 72 с.
6. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой части // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. - Новосибирск: Абвей, 2015. - С.321-325.
7. Панков П.С., Кененбаева Г.М. Иргөө кубулушу диссипациялык системалардын биринчи мисалы катарында жана компьютерде ишке ашыруу [Текст] / П.С. Панков, Г.М. Кененбаева // Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Кабарлары. – 2012. - № 3. – 105-108-б.
8. Kenenbaeva G., Nazarkulova B. Survey of effects and their consequences in various branches of mathematics // Abstracts of the V International Scientific Conference “Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev / Ed. by Academician A. Borubaev. - Bishkek, 2016. – P. 79.
9. Кененбаева Г.М., Шаршенбаев М.С. Явление практического расщепления траекторий в теории сингулярно-возмущенных систем // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 28. - Бишкек: Илим, 1999. – С. 240-245.
10. Самборская М.А., Кравцов А.В., Митянина О.Е. Формирование математической модели и исследование множественности стационарных состояний реакционно-ректификационного процесса // Известия Томского политехнического университета. 2011, Т. 319, № 3. – С. 90-95.